GEOMETRIÆ CAVALERII.

LIBER SEPTIMVS.

In quo quæcumque in antecedentibus Libris methodo indiuisibilium demonstrata fuere, alia ratione, ab eadem independente, breuiter ostenduntur.

PRÆFATIO.

GEOMETRIAE, in sex prioribus Libris per eam, quam indiuisibilium methodum non incongruè appellamus, hactenus promote, talis fuit, qualis hucusq; videri potuit, structura, necnon talia, qualia iacta sunt fundamenta. Illa quidem adeò firma, atq; inconcussa, esse decuit, vt velut adamantina summorum ingeniorum tamquam arietum ictibus pulsata ne minimum quidē nutantia agnoscerentur: Hoc enim Mathematicarum dignitati, ac summæ certitudini, quam præ omnibus alijs humanis scientijs, nemine philosophorum reclamante, ipsæ sibi vindicarunt, maximè conuenire manifestum est. An id ego sufficienter præstiterim aliorum iudicio relinquam; vnicuique enim hæc perlegenti ex animi sui sententia iudicare licebit. Haud quidem me latet circa continui compositionem, necnon circa infinitum, plurima à philosophis disputari, quæ meis principijs obesse non paucis fortasse videbuntur, propterea nempè hæsitantes, quod omnium linearum, seu omnium planorum, conceptus cimerijs veluti obscurior tenebris inapprehensibilis videatur: Vel quod in continui ex indiuisibilibus compositionem mea sententia prolabatur: Vel tandem quod vnum infinitum alio maius dari posse pro firmissimo Geometriæ sternere auserim fundamento, circa quæ millibus, quæ passim in scholis circumferuntur argumentis, ne Achillea

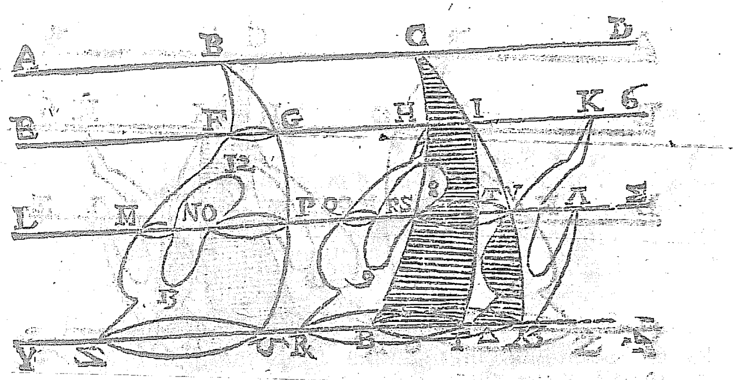
lea quidem armà resistere posse existimantur. His tamen ego per ea,
quæ Lib. 2. Prop. 1. ac illius Scholio præcipuè declarata, ac demon-
strata sunt, satisfieri posse diiudicaui: quoad conceptum enim omniū
linearum, seu omnium planorum efformandum, facilè hoc pernega-
tionem nos consequi posse existimaui, ita nempè vt nulla linearum,
seu planorum, excludi intelligatur. Quoad continui autem compo-
sitionem manifestum est ex præostensis ad ipsum ex indiuisibilibus cō-
ponendum nos minimè cogi, solum enim continua sequi indiuisibilium
proportionem, & è conuersò, probare intentum fuit, quod quidem cū
vtraq; positione stare potest. Tandem verò dicta indiuisibilium aggre-
gata non ita pertractauimus vt infinitatis rationem, propter infinitas
lineas, seu plana, subire videntur, sed quatenus finitatis quandam
conditionem, & naturam sortiuntur, vt propterea, & augeri, &
diminui possint, vt ibidem ostensum fuit, si ipsa prout diffinita sunt
accipiantur. Sed his nihilominus fortè obstrepent Philosophi, recla-
mabuntq; Geometræ, qui purissimos veritatis latices ex clarissimis
haurire fontibus consuescunt sic obijcientes. Hic dicendi modus ad-
huc videtur subobscurus, durior quàm par est euadit hic omnium li-
nearum, seu omnium planorum conceptus, quapropter hunc tuæ
Geometriæ ceu Gordium nodum aut auferas, aut saltem frangas, nisi
dissoluas. Fregissem quidem fateor, ò Geometræ, vel omninò à prio-
ribus Libris sustulissem, nisi indignum facinus mihi visum fuisset no-
ua hæc Geometriæ veluti mysteria sapientissimis abscondere viris; vt,
his fundamentis, quibus tot conclusionum ab alijs quoq; ostensarum
veritates adeò mirè concordant, alicuius industria melius fortè con-
cinnatis, huiusce nodi exoptatam illis dissolutionem aliquando præ-
stare possint. Interim qualiscumq; mea fuerit illius tentata dissolu-
tio, ipsum tamen in præsenti Libro, nouis alijs denuò stratis funda-
mentis, quibus ea omnia, quæ indiuisibilium methodo in antecedenti-
bus Libris iam ostensa sunt, alia ratione ab infinitatis exempta conce-
ptu comprobantur, omninò è medio tollendum esse censui. Hoc verò
præcipuè à nobis factum est, tum vt apud eos, quibus nostra hæc indi-
uisibilium methodus minus probabitur, non indignè nostram hanc de
Continuis doctrinam Geometriæ titulo insigniri clarius elucescat; tum
etiam vt appareat, quod non leui ratione ducti, cum possemus cuncta
per indiuisibilium methodum præostensa, tantum per huius Libri fun-
damenta demonstrare, illam quoque methodum tanquam nouam, ac
consideratione dignam, fuimus prosequuti. Nodum verò ipsum, cui
negotium facesseret, non inaniter in præcedentibus Libris relictum es-
se, quini amo nos ipsum alicui Alexandro aut frangendum, aut iuxta
scrupolisissimi cuiusq; Geometræ vota dissoluendum, meritò reser-
uasse, nō ineptè quispiam iudicabit.

TEO-

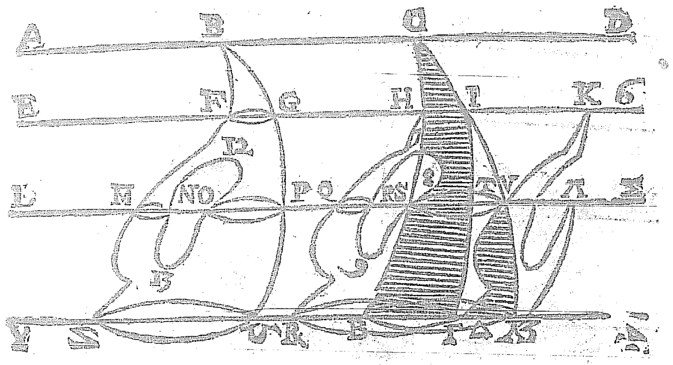
THEOREMA I. PROPOS. I.

FIguræ planæ quæcunq; in eisdem parallelis constitutę, in quibus, ductis quibuscunq; eisdem parallelis ęquidistantibus rectis lineis, conceptæ cuiuscumq; rectæ lineæ portiones sunt æquales, etiam inter se æquales erunt: Et figuræ solidæ quæcumq; in eisdem planis parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscunq; planis eisdem planis parallelis æquidistantibus, conceptæ cuiuscunq; sic ducti plani in ipsis solidis figuræ planæ sunt æquales, pariter inter se æquales erunt. Dicantur autem figuræ æqualiter analogæ, tum planæ, tum ipsæ solidæ inter se comparatæ, ac etiam iuxta regulas lineas, seu plana parallela, in quibus esse supponuntur, cum hoc fuerit opus explicare.

Sint quæcunq; planę figuræ, BZ&, CβΛ, in eisdem parallelis, AD, Y4, constitutæ, ductis autem ipsis, AD, Y4, quibuscunque parallelis, E6, LΣ, portione ex. g. ipsius, E6, in figuris conceptę, nempè, FG, HI, inter se sint æquales, necnon ipsius, LΣ, portiones, MN, OP, simul sumptæ (sit enim figura, BZ&, ex. g. intus caua secundum ambitum, 12, N, 13, O,) ipsi, SV, sint pariter ęquales, & hoc contingat in quibuscunq; alijs ipsi, AD, æquidistantibus. Dico figuras, BZ&, CβΛ, inter se æquales esse. Assumpta ergo alterutra figurarum, BZ&, CβΛ, vt ipsa, BZ&, cum parallelarum, AD, Y4, portionibus ipsi conterminantibus, nempè cum, AB, Y&, superponatur reliquæ figuræ, CβΛ, ita tamen vt ipsæ, AB, Y&, cadant super, BD, &4, vel ergo tota, BZ& congruit toti, CβΛ, & ita cum sibi congruant æquales erunt, vel non, aliqua tamen pars esto, quod congruerit alicui parti, vt, CIΓβ587, pars figuræ, BZ&, ipsi, CIΓβ587, parti figuræ, CβΛ. Manifestum est autem superpositione figurarum taliter effecta, vt portiones parallelarum, AD, Y4, ipsius figuris conterminantes sint inuicem superpositæ, quod quæcumq; rectæ lineæ in figuris conceptæ erāt sibi in directum, manent etiam sibi in directum, vt ex. g. cum, MN, OP, essent in directum ipsi, SV, dicta superpositione facta, manent etiam sibi in directum, nempe, QR, ST, in directum ipsi, SV, est enim distantia ipsarum, MN, OP, ab, AD, æqualis distantiæ, SV, ab eadem, AD, vnde quotiescunque, AB, extendatur super, BD, vbicunque hoc fiat, semper, MN, OP, manebunt in directum ipsi,



ipsi, SV, quod, & de cæteris quibuscunq; ipsi, AD, parallelis in
vtraque figura liquidò apparet. Quod verò pars vnius figuræ, vt,
BZ&, congruat necessariò parti figuræ, CβΛ, & non toti, dum fit
superpositio tali lege, quali dictum est, sic demonstrabitur. Cum
enim ductis quibuscunq; ipsi, AD, parallelis conceptæ in figuris
ipsarum portiones, quæ erant sibi in directum, adhuc post super-
positionem maneant sibi in directum, illæ verò ante superpositio-
nem essent ex hypotesi æquales, ergo post superpositionem por-
tiones parallelarum ipsi, AD, in figuris superpositis conceptæ erūt
pariter æquales, vt ex. g. QR, ST, simul sumptæ æquabuntur ipsi,
SV, ergo nisi vtræque, QR, ST, congruant toti, SV, congruente
parte alicui parti, vt, ST, ipsi, ST, erit, QR, æqualis ipsi, TV, &
QR, quidem erit in residuo figuræ, BZ&, superpositæ, TV, verò
in residuo figuræ, CβΛ, cui fit superpositio. Eodem modo osten-
demus cuicunq; parallelæ ipsi, AD, conceptæ in residuo, figuræ, B
Z&, superpositæ, quod sit, H℞597, respondere in directum ęqua-
lem rectam lineam, quę erit in residuo figuræ, CβΛ, cui fit super-
positio, ergo superpositione hac lege facta, cum supersit aliquid
de figura superposita, quod non cadat super figuram, cui fit su-
perpositio, necesse est reliquæ figuræ aliquid etiam superesse, super
quod nihil sit superpositum. Cum autem vnicuiq; rectæ lineæ
parallelę, AD, conceptæ in residuo, vel residuis (quia possunt esse
plures figuræ residuæ) figuræ, BZ&, siue, C℞Γ, superpositæ, re-
spondeat in directum in residuo, vel residuis figuræ; CβΛ, alia re-
cta linea, manifestum est has residuas figuras, siue residuarum ag-
gregata, esse in eisdem parallelis, cum ergo residua figura, H℞597,
sit



ſit in parallelis, E6, Y4, etiam reſidua figura, vel reſiduarum aggregatum, ipſius, Cβλ, (quod ſit ipſi fruſta, IΓλ, 785,) erit in eiſdẽ parallelis; E6, Y4, ſi enim non pertingeret hinc inde ad parallelas, E6, Y4, vt ex. g. ſi pertingeret quidem vſq; ad, E6, non tamen vſq; ad, Y4, ſed tantum vſque ad, LΣ, conceptis rectis lineis in fruſto, Q℞β59R, ipſi, AD, parallelis non reſponderent in reſiduo figuræ, Cβλ, ſeu ex reſiduis aggregato, aliæ rectæ lineæ, vt ſuperius neceſſe eſſe probatum eſt, ſunt ergo hæc reſidua, vel reſiduorum aggregata in eiſdem parallelis, & in illis conceptæ parallelarum ipſis, AD, Y4, portiones inter ſe ſunt æquales, vt ſupra oſtendimus, ergo reſidua, ſeu reſiduorum aggregata, ſunt eius conditionis, cuius ipſas, BZ&, Cβλ, figuras iam eſſe ſuppoſitum fuit, ideſt æqualiter analoga. Fiat ergo denuo reſiduorum ſuperpoſitio, ita tamen vt parallelæ, GH, & β, ſuper parallelas, HK, β4, ſint conſtitutæ, & congruat pars, VΔλ, fruſti, H℞597, parti, VΔλ, fruſti, IΓλ, oſtendemus ergo vt ſupra, dum vnius habetur reſiduum haberi etiam alterius, & hæc reſidua, ſiue reſiduorum aggregata, eſſe in eiſdem parallelis, ſit autem ad figuram, BZ&, ſpectans reſiduum, KVλ3ΠX, ad figuram autem, Cβλ, ſint pertinentia reſidua, IΓΔV, 785, quorum aggregatum eſt in eiſdem parallelis cum reſiduo, KVλ3ΠX, nempè in parallelis, E6, Y4, ſi ergo horum reſiduorum fiat denuò ſuperpoſitio, ita tamen vt parallelæ, in quibus exiſtunt, ſint ſemper ad inuicem ſuperpoſitę, & hoc ſemper fieri intelligatur, donec tota figura, BZ&, fuerit ſuperpoſita, dico totam debere ipſi, Cβλ, congruere, alioquin ſi eſſet aliquod reſiduum vt figurę, Cβλ, cui nihil eſſet ſuperpoſitum, eſſet etiam aliquod reſiduum figurę,

BZ&,

BZ&, quod non eſſet ſuperpoſitum, vt ſupra oſtendimus neceſſe
eſſe, ponitur autem totam, BZ&, eſſe ſuperpoſitam ipſi, Cβλ, er-
go ita ſunt ad inuicem ſuperpoſitę, vt neutrius reſidua habeantur,
ergo ita ſunt ſuperpoſitę, vt ſibi congruant, ergo figuræ, BZ&, C
βλ, inter ſe ſunt æquales.

Sint nunc in eodem ſchemate duæ figuræ ſolidæ quæcunque,
BZ&, Cβλ, in eiſdem planis parallelis, AD, Y4, conſtitutæ, ductis
autem quibuſcunq; planis, E6, LΣ, præfatis æquidiſtantibus, ſint
conceptæ in ſolidis figuræ, quæ iacent in eodem plano, ſemper in-
ter ſe æquales, vt, FG, æqualis, HI, &, MN, OP, ſimul ſumptæ
(ſit enim ſolida figura ex. g. BZ&, intus vtcunq; caua ſecundum
ſuperficiem, 12, N; 13, O,) æquales ipſi, SV. Dico eaſdem ſolidas
figuras æquales eſſe. Si enim ſolidum, BZ&, cum portionibus,
ABY, & planorũ, AD, Y4, ipſi conterminantibus, ſolido, Cβλ, ita
ſuperpoſuerimus, vt planum, AB, ſit in plano, AD, &, Y&, in pla-
no, Y4, oſtendemus (vt fecimus ſuperius circa parallelarum ipſi, A
D, conceptas in figuris planis, BZ&, Cβλ, portiones) figuras in
ſolidis, BZ&, Cβλ, conceptas, quæ erant in eodem plano, etiam
poſt ſuperpoſitionem manere in eodẽ plano, & ideò adhuc ęqua-
les eſſe figuras in ſuperpoſitis ſolidis conceptas, & ipſis, AD, Y4,
parallelas. Niſi ergo totum ſolidum toti congruat in prima ſu-
perpoſitione, relinquentur reſidua ſolida, vel ex reſiduis compoſi-
ta in vtroq; ſolido, quæ non erunt ad inuicem ſuperpoſita, cum
enim ex. g. figuræ, QR, ST, æquentur figuræ, SV, dempta com-
muni figura, ST, reliqua, QR, æquabitur reliquæ, TV, hocq; cõ-
tinget in quouis alio plano ipſi, AD, parallelo occurrente ſolidis,
C℞Γ, Cβλ, ergo ſemper habentes reſiduum vnius ſolidi, habebimus
etiam reſiduum alterius, & patebit, iuxta methodum adhibitam in
priori parte huius Propoſitionis circa figuras planas, reſidua ſoli-
da, vel reſiduorum aggregata ſemper eſſe in eiſdem parallelis pla-
nis, vt reſidua, H℞597, IΓλ, 785, eſſe in planis parallelis, E6, Y4,
ac æqualiter analoga: ſi ergo hæc reſidua adhuc ſuperponantur,
ita vt planum, EH, locetur in plano, H6, &, Yβ, in, β4, & hoc
ſemper fieri intelligatur, donec quod ſuperponitur, vt, BZ&, totũ
fuerit aſſumptum, tandem ipſum totum, BZ&, congruet toti, Cβ
λ, niſi enim toto ſolido, BZ&, ipſi, Cβλ, ſuperpoſito, ipſa ſibi cõ-
gruerent, eſſet aliquod reſiduum vnius, vt ſolidi, Cβλ, ergo etiam
eſſet aliquod reſiduum ſolidi, C℞Γ, ſeu, BZ&, illudq; non eſſet ſu-
perpoſitum, quod eſt abſurdum, ponitur enim iam totum ſolidũ,
BZ&, eſſe ipſi, Cβλ, ſuperpoſitum, non ergo erit aliquod reſiduũ
in ipſis ſolidis, ergo ſibi congruent, ergo dictæ figuræ ſolidæ, BZ&,
Cβλ, inter ſe æquales erunt, quæ fuerunt demonſtranda. Præfatę

autem

autem figuræ, vt supra innuimus, dicatur æqualiter analogæ, & si; opus erit, iuxta regulas lineas parallelas, seu plana parallela, AD Y4.

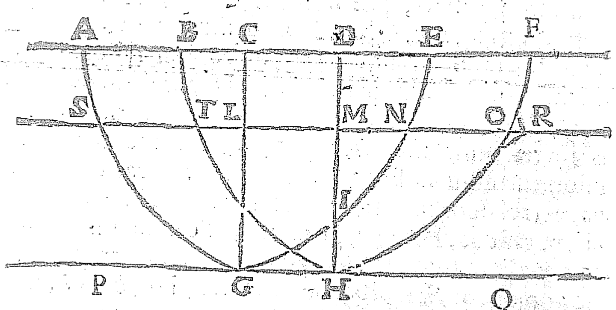
SCHOLIVM.

Cum antecedens Prop. maximi sit momenti, vt in sequentibus apparebit, aliusq; modus priorem partem demonstrandi, stylo Archimedeo haud absimilis, menti succurrerit, idipsum ne pereat in Lemmata distributum hic subiungere placuit.

LEMMA PRIMVM.

SI in eadem, vel æqualibus basibus, & in eisdem parallelis figuræ planę æqualiter analogę iuxta easdem bases fuerint constitutæ, ita tamen, vt quæcunq; æquidistātium basibus linearum portiones in eisdem conceptæ figuris integræ sint, ac eidem basi, vel basibus æquales, ipsæ pariter figuræ inter se æquales erunt.

Sint in eadem basi, GH, seu in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis, AF, PQ, figuræ planæ, AGHB, EGHF, æqualiter analogę iuxta eandē basem, GH, seu bases equales iā dictas, extensa verò quacunq; ipsis, PQ, AF, parallela, SR, eiusdem portiones captæ in præfatis figuris, vt, ST, NO, integræ sint, ac æquales basi, GH, seu dictis æqualibus basibus. Dico etiam præfatas figuras inter se æquales esse. In eadem enim basi, GH, seu in altera dictarum æqualium basium sit constitutum, & in eisdem parallelis, AF, PQ, quodcunq; parallelogrammum, CH, in quo portio concepta ipsius, SR, sit, LM, quę erit æqualis ipsi, GH, & consequenter ipsi, NO, vnde addita communi, MN, fiet, LN, æqualis, MO. Eodem modo autem ostendemus, CE, esse æqualem, DE, & reliquas huiusmodi similiter adæquari.

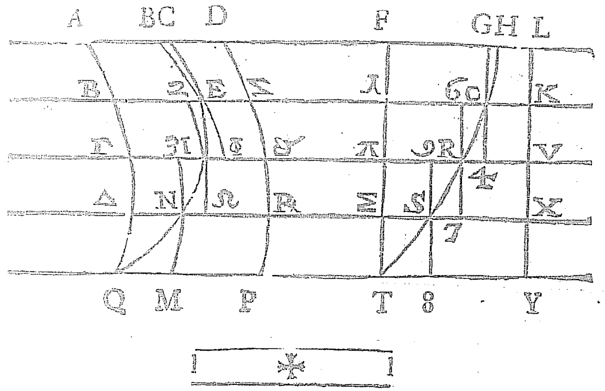


Nunc assumpto trilineo, ECG, & posito, C, in, D, & CG, in, DH, cadet, G, in, H, quia, CG, DH, sunt æquales, cadente verò trilineo, ECG, super, FDH, extendetur, CE, super, DF, cum angulus, FDH, exterior sit æqualis interiori, ECG, parallelarum, DH, CG, & punctum, E, erit in, F, ambitusque, ENG, cadet super ambitum, FOH, si enim non, esto quod aliquod punctum ambitus, ENG, non cadat super, FOH, cadet ergo, vel extra trilineum, FDH, vel intra, cadat extra, vt in, R, ita vt ambitus, ENGH, cadat vt, FRH, erit ergo, MR, maior, MO, sed, MR, est æqualis, LN, ergo, LN, erit maior, MO, sed est etiam æqualis eidem, MO, ex demonstratis, ergo esset æqualis, & maior eadem, MO, quod est absurdum, non ergo aliquod punctum ambitus, ENG, cadit extra trilineum, FDH, eodem modo probabitur, nec cadere intra eundem trilineum, ergo ambitus, ENG, cadet super ambitum, FOH, congruens totus toti, & consequenter etiam trilineus, ECG, congruet trilineo, FDH, & illi æqualis erit, vnde ablato communi trilineo, DIE, & addito communi trilineo, GIH, fiet, EGHF, figura æqualis parallelogrammo, CH. Eodem modo ostendemus figuram, AGHB, æquari eidem, CH, ergo figuræ, AGHB, EGHF, inter se æquales erunt. Cum autem dictæ figuræ fuerint in æqualibus basibus, tum constituentes super vnamquāq; parallelogrammum in eisdem parallelis cum ijsdem positum, concludemus etiam dictas figuras æquales esse, probantes eodem modo descriptis parallelogrammis adæquari, quę quidem inter se erūt æqualia, quod demonstrare opus erat. Hæc autem vocentur parallelogramma curuilinea, cum, AG, BH, EG, FH, fuerint curuæ lineæ, cum verò fuerint rectæ lineæ, parallelogramma rectilinea, sed vtraq; in genere ad illorum differentiam eadem appellabimus, sed vtraq; in genere, si libuerit, nomine parallelogrammi tantum etiam nuncupabimus.

LEMMA II.

SI in æqualibus rectis lineis, tamquā in basibus, & in eisdem parallelis, fuerint quæcunq; planæ figuræ, æqualiter analogæ iuxta dictas bases; portiones autem æquidistantium quotcunq; ipsis basibus linearum in figuris conceptæ integræ fuerint, ac in altera dictarum figurarum sic se habentes, vt quælibet propinquior basi sit maior remotiori, dictæ figuræ inter se æquales erunt.

Sint



Sint in æqualibus rectis lineis, QP, TY, tamquam in basibus, & in eisdem parallelis, AL, QY, quæcunq; planæ figuræ CQPD, HTYL, æqualiter analogæ iuxta dictas bases, QP, TY, ductis autem quotcunq; basibus parallelis, vt, ΛX, ΓV, βK, earum in figuris conceptæ portiones integræ sint, ac in altera figurarum propinquior basi maior remotiori, vt si conceptæ in, CQPD, sint, N℞, I&, EZ, & in, HTYL, ipsæ, SX, RV, OK, istæ quidem integræ sint necnon ex. g. in figura, CQPD, N℞, maior, I&; I&, maior, EZ, & sic in cæteris (erit enim etiam, SX, maior, RV, &, RV, maior, OK, & sic in cæteris, cum sint æqualiter analogæ iuxta bases, QP, TY.) Dico figuras, CQPD, HTYL, inter se æquales esse. Si enim non sint æquales, altera earum maior erit, sit maior, HTYL, ipsa, CQPD, spatio, ✠, tunc minoris figuræ basis, QP, moueatur versus, AD, semper ipsi, AD, æquidistanter, ac manente iugiter puncto, P, in linea, PD, donec congruat ipsi, AD, igitur punctum, Q, describet lineam, QΓA, &, QP, describet parallelogrammum, AP, rectilineum, seu curuilineum, prout, AQ, DP, fuerint rectæ, vel curuæ, erit autem, QΓA, tota extra figuram, CQPD, cum parallelæ, QP, in figura, CQPD, ipsi, QP, propinquiores remotioribus sint semper maiores (quo pacto data basi, & curua linea, tota in eodem plano cum ipsa basi, ac vni extremorum eiusdem conterminante, parallelogrammum curuilineum, ab ijsdẽ apprehensum, describere docemur) similiter compleatur parallelogrammum, FY, ducaturquæ, ΓV, parallela, QY, bifariam diuidens altitudinem figurarum, CQPD, HTYL, respectu, QY, assumptam, secansque, AQ, in, Γ, CQ, in, I, DP, in, &, FT, in, Π, HT, in, R, &, LY, in, V, per, ΓV, igitur diuidetur parallelogrammum, AP,

Post. 1. l. 2.

AP, in æqualia parallelogramma, A&, &Q: rursus autem per alias ipsi, QY, parallelas diuidantur dictæ altitudinis portiones bifariam, & sic semper fiat (sectis insimul constitutis parallelogrammis, quæ idcircò etiam bifariam diuidentur) donec ad parallelogrammum, vt ad, ℞Q, deueniatur minus spatio, ✠, sit igitur sectum, AP, in parallelogramma, æquè alta, AZ, β&, Γ℞, ΔP, per equidistantes lineas, βK, ΓV, ΔX, quæ secent lineas, AQ, in punctis, β, Γ, Δ, CQ, in, E, I, N, DP, in, Z, &, ℞, FT, in, ΛΠΣ, HT, in, O, R, S, & tandem, LY, in, K, V, X, compleanturq; parallelogramma, BZ, 2&, 3℞, ΔP, iuxta descriptionem superius traditam, erunt enim lineæ, BE, 2I, 3N, ΔQ, extra figuram, CQPD, quod patebit, veluti, AQ, extra, CQPD, similiter cadere ostensa est, & consequeuter figura ex parallelogrammis, BZ, 2&, 3℞, ΔP, composita comprehendet spatium, CQPD, sint autem etiam completa parallelogramma, E&, I℞, NP, quorum descriptæ lineæ, EΦ, IΩ, NM, intra figuram, CQPD, quidem cadere ostendemus ex eadem ratione, quod dictæ parallelæ ipsi, PQ, propinquiores remotioribus sint semper maiores, & subinde patebit figuram ex parallelogrammis, E&, I℞, NP, compositam comprehendi à figura, CQPD. Tandem compleantur parallelogramma quoque, Gk, 6V, 9X, ΣY, ex quibus compositam figuram spatium, HTYL, eadem methodo comprehendere demonstrabimus: Cum ergo figura comprehendens spatium, CQPD, superet ab eo comprehensam parallelogrammis, BZ, 2Φ, 3Ω, ΔM, hoc est parallelogrammo, ΔP, quod est minus spatio, ✠, dicta comprehendens figura superabit, CQPD, multò minori spatio, quam sit, ✠, sed, HTYL, superat, CQPD, ex hypotesi spatio, ✠, ergo figura comprehendens, CQPD, minor est, HTYL, & multò minor figura ipsum, HTYL, comprehendente, quæ iam descripta fuit, hoc autem est absurdum, cum enim parallelogrammum, BZ, æquetur ipsi, GK, 2&, 6V, 3℞, 9X, &, ΔP, ΣY, tota toti adæquatur contra prædemonstrata, non ergo figura, HTYL, maior est, CQPD.

Elicit. ex ant. Lem.

a. Decim. Elem.

Ex antec. Lem.

Sit nunc eadem minor, si possibile est, eodem spatio, ✠, igitur descriptis circa, CQPD, eisdem figuris, ita vt comprehendens, CQPD, superet ab eo comprehensam minori spatio, quam sit, ✠, cõpleantur parallelogramma, OV, RX, SY, ex quibus compositam figuram, vt supra à spatio, HTYL, comprehendi ostendemus. Igitur si comprehendens, CQPD, superat figuram comprehensam minori spatio, quam sit, ✠, ipsum spatium, CQPD, superabit ab eo comprehensam figuram multò minori spatio, quam sit, ✠, idẽ autem superat, HTYL, spatio, ✠, ergo figura comprehensa à spatio, CQPD, maior erit spatio, HTYL, & multò maior erit figura iam descripta, ab eodem spatio, HTYL, comprehensa, quod est absurdum, cum enim parallelogrammum, E&, æquetur, OV, IR, ipsi, RX, necnon, NP, ipsi, SY, tota toti adæquatur contra præ demonstrata, nec ergo figura, HTYL, minor esse potest figura, CQPD, sed neque eadem maior, vt ostensum est, ergo eidem æqualis erit, quod demonstrare oportebat. Vnamquamque autem dictarum figurarum, CQPD, HTYL, præfatas conditiones habentium, figuram in alteram partem deficientem appellabimus, regula basi, seu quacunq; illi æquidistante.

Ex antec. Lem.

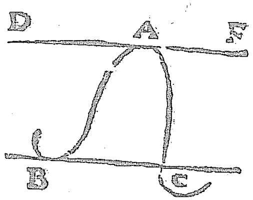
LEMMA III.

SI curua linea quæcunq; tota sit in eodem plano, cui occurrat recta in duobus punctis, aut rectis lineis, vel in recta, & puncto, poterimus aliam rectam lineam præfatæ æquidistantem ducere, quæ tangat portionem curuæ lineæ inter duos prædictos occursus continuatam.

DEFINITIO. ✠

TAngere autem dico rectam lineam aliam quamcunque curuam totam in eodem plano cum ea existentem, cum ipsa recta linea siue in puncto, siue in recta linea, curuæ occurrente, eadem curua vel tota est ad eandem partem, vel illius nihil est ad alteram partem illi occurrentis rectæ lineæ.

Sit curua linea, BAC, tota in eodem existens plano, cui recta, BC, occurrat in duobus punctis, seu rectis lineis, vel in recta, & puncto, B, C. Dico nos aliam rectam ipsi, BC, æquidistantem ducere posse, quæ tangat portionem curuæ lineæ inter duos occursus, B, C, continuatam. Quoniam ergo recta est, BC, & curua, BAC, ideò inter se spatium comprehendent, figuramque, vt, BAC, constituent, ergo possibile



1. lib. 1. erit figuræ, BAC, respectu rectæ, BC, verticem inuenire, sit is punctum, A, per quod ducatur, DF, parallela, BC, igitur, DF, tanget figuram, BAC, ergo totus ambitus, BAC, est ad eandem partem

tem

tem rectæ, DF, vel nihil est saltem ad alteram partem, si enim aliqua illius portio esset ad alteram partem rectæ, DF, iam recta, DF, secaret figuram, BAC, quod est absurdum, ergo recta, DF, tangit curuam, BAC, igitur possibile est, &c.

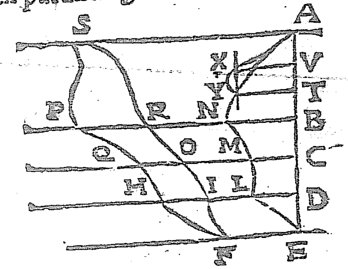
COROLLARIVM.

HInc manifestum est quomodo ducenda sit recta linea datam curuam totam in eodem plano cum ea existentem contingens, quæ quidem data recta linea sit æquidistans.

LEMMA IV.

SI proposita quæcumque figura plana vni regulæ parallelis quotcumque lineis ita secari possit, vt conceptæ in figura rectæ lineæ integræ semper existant: Ipsa ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, seu ex figuris in alteram partem deficientibus, regula eadem, componetur.

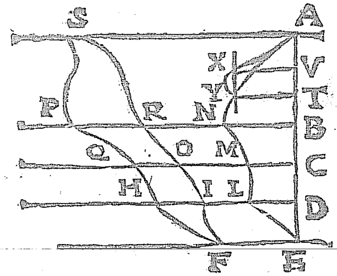
Sit quæcumque figura plana, SPFR, talis tamen, vt secta quotcumq; vni regulæ, vt, FE, parallelis, conceptæ in ipsa rectæ lineæ integræ sint. Dico ipsam, vel ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, vel ex figuris in alteram partem deficientibus, reg. eadem, FE, componi. Sint enim ductæ, SA, FE, oppositæ tangentes figuræ, SPFR, regula eadem, FE, quibus incidat quomodocumq; recta linea, AE, moueatur autem, FE, versus, SA, semper æquidistanter eidem, SA, donec illi 1. lib. 1.



congruat, interim verò punctum, E, ita in ipsa feratur, vt describat lineam, ENA, cum, AE, figuram, ANE, comprehendentem, quæ eidem, SPFR, sit æqualiter analoga iuxta regulam, FE; in eadem integris existentibus parallelis ipsi, FE, ad ambitum, ANE, terminantibus: rursus feratur recta linea, AE, versus ambitum, ANE, semper ipsi, AE, æquidistanter donec totam pertransierit figuram, ANE, adnotentur autem contactus lineæ sic decurrentis

in

in ambitu, ANE, vel enim tanget in linea, aut lineis, vel in punctis, & lineis, vel tantum in punctis, esto quod fiat contactus in recta, LM, & in puncto, N, transeantq; per puncta, L, M, N, rectæ lineæ regulæ, FE, parallelæ, HD, QC, PB, secantes ambitum figuræ, SPFR, in punctis, P, Q, H, I, O, R, & rectam, AE, in punctis, B, C, D, nullusque alius



factus fuerit contactus in ambitu, ANMLE. Quoniam ergo a puncto, N, ad, A, nullus datur contactus, erit, ANB, figura in alteram partem, nempè versus, A, deficiens, hoc est quælibet in figura, ANB, parallela, NB, erit maior remotiori, si enim non, esto quod aliqua vt, YT, non sit maior remotiori, XV, ad ambitum terminata, vel ergo erit illi æqualis, vel eadem maior, sit illi æqualis, & iungatur, YX, hæc ergo erit parallela, AE, & occurrit ambitui in duobus punctis, Y, X, ergo possibile erit ducere rectam lineam ipsi, YX, seu, AE, parallelam, tangentem portionem curuæ lineæ, hoc est ambitus, AN, inter duos occursus, Y, X, continuatam, quod est contra suppositum: quod si dicatur, YT, esse minorem, XV, multò magis conuincetur præfatum absurdum, ergo, YT, erit maior, XV, & quælibet, NB, propinquior remotiore maior, ergo figura, ANB, erit in alteram partem deficiens: eodem modo autem ostendemus etiam, NMCB, LED, esse figuras in alteram partem deficientes, LMCD, autem manifestum est esse parallelogrammũ rectilineum, ergo in figura, SPFR, ipsa, SPR, quæ est æqualiter analoga ipsi, ANB, erit figura in alteram partem deficiens, sic etiã, PQOR, HFI, QHIO, verò erit parallelogrammum rectilineum, seu curuilineum, prout, QH, OI, rectæ, vel curuæ, esse possunt, ergo figura, SPFR, componitur ex figuris in alteram partem deficientibus, ac ex parallelogrammo rectilineo, seu curuilineo, regula, FE, quod ostendere opus erat.

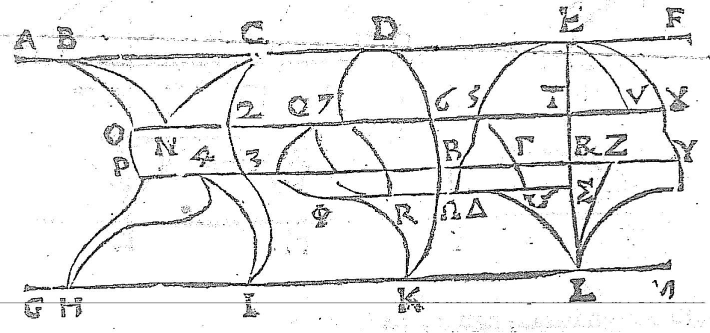
Ex antec. Lem.

COROLLARIVM.

Hinc habetur figuram, SPFR, ipsi, ANE, æqualem esse, & vniuersaliter figuras planas æqualiter analogas, in quibus earum regula æquidistantium quotcunq; linearum concepta portiones integra sunt, inter se æquales esse.

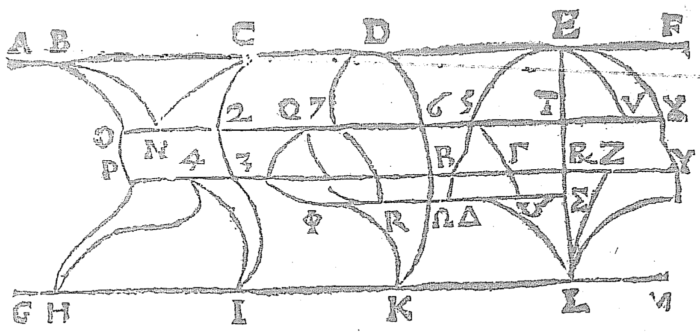
Pro-

Proposit. antecedens, aliter, quoad priorem partem, ostensa.



Sint quęcũq; figurę planę ęqualiter analogę iuxta regulã, GM, ipsę, BHIC, DQK, quarum opposite tangentes, AF, GM, regula pariter, GM, parallelarũ, autẽ ipsi, GM, quotcumque portiones in vnaque dictarum figurarum integrę sint, siue non. Dico easdem ęquales esse. Incidat ergo parallelis, AF, GM, quomodocumque recta linea, EL, in eisdem terminata, moueatur autem, GM, versus, AF, semper eidem, AF, ęquidistanter donec illi congruerit, interim autem vnum punctum moueatur in eadem, GM, sic mota, describens ambitum, LβE, figurę ęqualiter analogę ipsi, DQK, & aliud punctum in eadem motum ad aliam partem, EL, describat ambitum figurę, EYL, ęqualiter analogę ipsi, BHIC, in quibus quidem sic descriptis figuris conceptę ipsi, GM, parallelarum portiones quęcumque integrę sint. Erit ergo figura, EβL, ęqualis figurę, EYL, esto autem quod in figura, DQK, conceptę portiones parallelarum ipsi, GM, non omnes sint integrę, sed aliquę fractę per interiorem ambitum, nempè, quę intercipiuntur parallelis, Q6, ΦΩ, in quibus habeantur duo figurę frusta, 67RΩ, CΦR, in quorum tamen vnoquoque dictę parallelarum portiones integrę habeantur, sit autem in motu, GM, à quodam puncto descripta linea, &T5, nempè ambitus figurę, 5&ΣΓ, eodem modo, quo descripti fuerunt ambitus, EβL, EYL, figurę inquam, 5&ΣT, ęqualiter analogę frusto, 7RΩ6; erit ergo reliqua figura, 5ΔΣ, ęqualiter analoga frusto, QΦR, cum tota, TΣΔΣ, sit toti composito ex frusti, QΦR, 7RΩ6, ęqualiter analoga, & sunt portiones ipsi, GM, parallelarum

Ex antec. Lem.

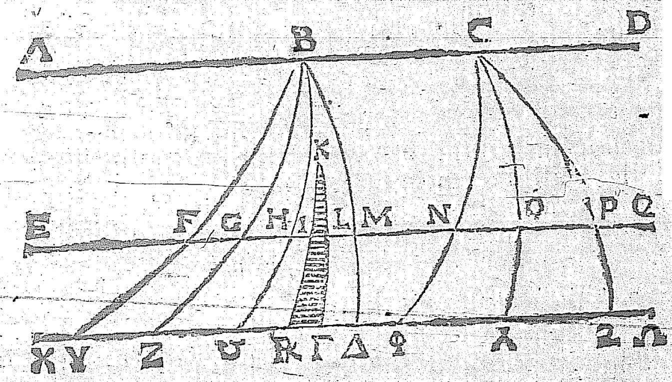


laru n in vnaquaq; figura, 5Δ&, 5&ΣT, integræ omnes, ficut
contingere ſuppoſuimus in fruſtis, QΦR, 7RΩ6, ergo cum, QΦR,
En antec. Lem. 5Δ&, ſint figuræ etiam æqualiter analogæ, inter ſe æquales erunt:
Eadem ratione patebit fruſtum, 7RΩ6, æquari figuræ, S&ΣT, er-
go fruſta, QΦR, 7RΩ5, ſimul ſumpta æquabuntur figuræ, T5βΔΣ,
ſed & figuram, 76D, ipſi, EST, adæquari, necnon, ΦKΩ, ipſi, ΔL
Ex antec. Lem. Σ, pariter adæquari manifeſtum eſt, cum ſint figuræ æqualiter ana-
logæ, & portiones parallelarum ipſi, GM, in eiſdem conceptarũ
integræ ſint, ergo tota figura, DQK, toti, FβL, æqualis erit. Cõ-
ſimili modo in figura, BHIC, ducentes rectas lineas ipſi, GM, pa-
rallelas, nempè, O2, P3, quibus ipſa diſtinguatur in fruſta, capien-
tia dictas parallelarum portiones integras ſcilicet in fruſta, BON,
CN2, PH4, 4I3, OP32, PH4, 4I3, eaſdem, O2, P3, producentes
vt ſecent ambitum figuræ, EYL, velut in, T, X, ℞Y, deſcriptiſq;
lineis, EV, ZL, vt fuit deſcripta, 5F&, vt conſtituatur figura, ET
Ex antec. Lem. V, æqualiter analoga fruſto, CN2, (ex quo remanet, EVX, æqua-
liter analoga ipſi, BON,) & figura, Z℞L, æqualiter analoga ipſi,
4I3, (ex quo, ZLY, remanet etiam æqualiter analoga ipſi, PH4,)
cum in his captę parallelarum dictæ portiones integræ ſint, mani-
feſtum erit fig. ETV, æquari ipſi, CN2, EVX, ipſi, BON, Z℞L,
ipſi, 4I3, ZLY, ipſi, PH4, & tandem, XT℞Y, ipſi, OP32, ex quo
concludemus figuram, BHIC, æquari ipſi, EYL, hoc eſt ipſi, EβL,
ſed eidem, EβL, oſtenſa eſt æqualis etiam, DQK, ergo figuræ, B
HIC, DQK, inter ſe æquales erunt, igitur quæcumq; planæ figu-
ræ æqualiter analogæ inter ſe æquales erunt, quod oſtendendum
erat. Per hæc autem priori parti Propoſ. 1. huius iam ſatisfactum
eſſe manifeſtum eſt.

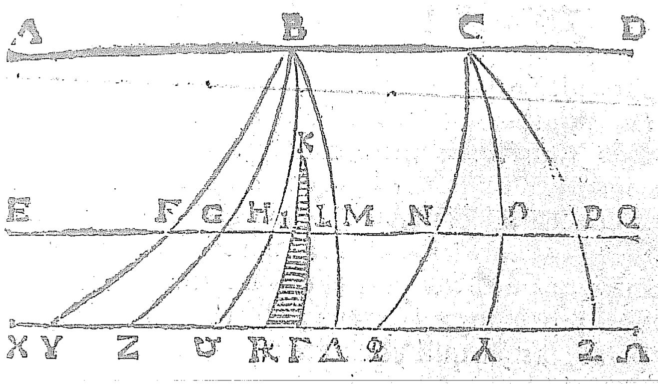
THEO-

THEOREMA II. PROPOS. II.

Figuræ planæ quæcumq; in eiſdem parallelis conſtitu-
tæ, in quibus, ductis quibuſcumq; eiſdem parallelis
æquidiſtantibus rectis lineis, conceptæ cuiuſcumq; rectæ
lineæ portiones ſunt inter ſe, vt cuiuſlibet alterius in eiſdẽ
figuris conceptæ portiones (homologis tamen in eadem
figura ſemper exiſtentibus) eandem inter ſe proportionem
habebunt, quam dictæ portiones. Dicantur autem pro-
portionaliter analogæ, ac etiam, ſi libuerit, iuxta regulas
ipſas parallelas, in quibus exiſtunt.



Sint duæ quælibet figuræ planæ, B&℞KΓΔ, CΦλ, inter paralle-
las AD, XΩ, conſtitutæ, ducta vero vtcumq; EQ, prædictis paral-
lela, eiuſdem portiones in figura, B&Δ, conceptæ, quæ ſint, HI, L
M, ſimul ſumptæ ſint ad eam, ſeu ad eas, quæ concipiuntur in fi-
gura, CΦλ, vt aliæ quælibet ſimiliter ſumptæ, nempè ex. g. vt, &
℞ΓΔ, ad, Φλ. Dica figuram, B&℞KΓΔ, ad figuram, CΦλ, eſſe vt,
HI, LM, ad, NO, vel vt, &℞, ΓΔ, ad, Φλ, vel vt quęlibet aliæ ſi-
militer ſumptæ. Accipiantur in, Φλ, producta verſus, λ, quotcũq;
eidem, Φλ, æquales, vt; λ2, ſimiliter quælibet linearum figuræ, CΦ
λ, producatur, & in ipſa intelligantur tot aſſumptæ æquales vni-
cuiq; productarum, quot aſſumptæ ſunt æquales ipſi, Φλ, ex.g. vni-
ca



ca tantum, & per omnium terminos ex parte, 2, transeat linea, CP2, similiter in alia figura, B&Δ, sumantur quotcumq; in ipsa, Δ&, producta versus, &, æquales ipsis, &℞ΓΔ, simul sumptis, & productis reliquis in fig. B&Δ, ipsi, &Δ, parallelis, aliæ tot æquales suis productis in directum capiantur, per quorum omnium terminos transeant lineæ, BGZ, BFY. Quoniam ergo figuræ, BFYZG, BGZ&H, B&℞kΓΔ, sunt in eisdem parallelis, AD, XΩ; & ductis in eisdem quomodocumq; ipsis, AD, XΩ, parallelis, interceptæ in figuris portiones sunt æquales, ideò ipsæ figuræ, BYZ, BZ&, B&℞kΓΔ, æqualiter analogæ, & subinde æquales, erunt: Quo pa-
Per ant. cto etiam ostendemus figuras, φCλ, λC2, æquales esse: Quotuplex ergo est aggregatum ex, Y℞, ΓΔ, aggregati ex, &℞, ΓΔ, totuplex erit aggregatum ex figuris, BYZ, BZ&, B&℞kΓΔ, seu figura, BY℞kΓΔ, figuræ, B&℞kΓΔ; similiter quotuplex erit, φ2, ipsius, φλ, totuplex erit aggregatum ex figuris, Cφλ, Cλ2, hoc est figura, Cφ2, ipsius figuræ, Cφλ, habemus ergo æquè multiplices primæ, & tertiæ vtcumq; assumptas, similiter & æquè multiplices secundæ, & quartæ. Quoniam verò ex. g. Y℞, ΓΔ; FI, LM, sunt æquè multiplices ipsarum, &℞, ΓΔ; HI, LM, similiter, 2φ, PN, sunt æquè multiplices ipsarum, φλ, NO, ipsę verò, &℞, ΓΔ, HI, LM, φλ, NO, sunt proportionales, ideò si aggregatum ex, Y℞, ΓΔ, adæquabitur ipsi, φ2, etiam aggregatum ex, FI, LM, adæquabitur ipsi, NP, vt & reliquæ omnes similiter sumptæ, & consequenter
Ex ant. etiam figura, BY℞kΓΔ, adæquabitur figuræ, Cφ2, si verò aggregatum ex, Y℞, ΓΔ; superet, φ2, eodem modo patebit figuram, BY℞kΓΔ, superare figuram, Cφ2, vel superari ab eadem, si, Y℞, ΓΔ;

su-

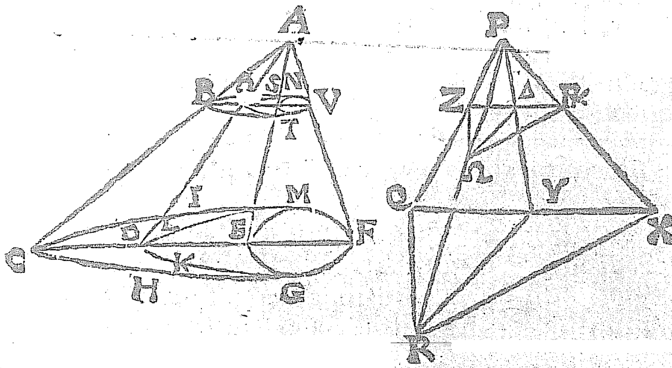
supereretur à, φ2, ergo prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam .s. figura, B&℞KΓΔ, ad figuram, Cφλ, erit, vt aggregatum ex, &℞, ΓΔ; ad, φλ, vel vt aggregatum ex, HI, LM, ad, NO, seu vt quælibet aliæ duæ similiter sumptę, quod erat ostendendum. Dicantur autem dictę figuræ proportionaliter analogę iuxta regulam, AD, vel, XΩ.

THEOREMA III. PROPOS. III.

FIguræ solidæ quæcumq; in eisdem planis parallelis constitutæ, in quibus ductis quibuscumque planis dictis parallelis æquidistantibus, conceptæ cuiuscumq; sic ducti plani in ipsis solidis figurę planę sunt inter se, vt eiusmodi cuiuslibet alterius plani in eisdem solis conceptæ figuræ (homologis tamen in eodem solido semper existentibus) eandem inter se, quam dictæ iam conceptæ cuiuscumq; plani figuræ, rationem habebunt. Dicantur autem figurę proportionaliter analogæ, iuxta regulas ipsa plana parallela, in quibus existunt.

Sint duę quelibet fig. solidę, AMEGF, PQRY, in eisdem planis parallelis constitutę; ductis verò quibuscumq; planis præfatis parallelis ęquidistantibus, eorum conceptę, in solidis figurę sint vnius plani ex. g. figuræ, NSTV, ZΩΔ, alterius autem, MEGF, QRY, vel contingat has esse solidorum bases, ac in altero planorum parallelorum, solida, AMEGF, PQRY, contingentium, sit verò figura, MEGF, ad figuram, QRY, vt figura, NSTV, ad figuram, ZΩΔ, homologis nempè in eodem solido existentibus. Dico solidum, AMEGF, ad solidum, PQRY, esse vt, NSTV, figura, ad figuram, ZΩΔ, vel vt figura, MEGF, ad figuram, QRY. Ducatur enim in figura, MEGF, vtcumq; recta, EF, ad illius ambitum terminata, cui ducta parallela, SV, in figura, NSTV, producantur ambæ indefinitè versus puncta, S, E, in quibus sumantur vtcūq; ęquè multiplices, BS, CE, similiter in eisdem figuris ductis alijs eisdem, SV, EF, ęquidistantibus, sumātur earum pariter ęquè, multiplices iuxta predictarum multiplicitatem, & omnium termini sint in lineis, NBT, MICHG, sicut ipsarum partium termini sint in lineis, NST, NOT, NBT, MEG, MDG, MCG, traductis verò alijs quotcumq; planis pręfatis parallelis, ac ipsa solida secantibus, hoc idem fiat circa ipsorum figuras in ipsis solidis conceptas, omnium verò ita

 resul-



resultantium figurarum termini sint in superficiebus, AMCG, A MDG; AMEG similiter in alio solido esto quod plana, quę produxerũt in solido, AMEGF, figur. MEGF, NSTV, genuerint figuras, QRY, ZΛΩ, ad quas illæ habent eandem rationem, ductis autem, vel assumptis rectis, QY, ZΔ, inter se parallelis, illæ producantur versus eandem partem, ΔY, in ijsq; productis accipiantur quæcũq; æquè multiplices, vel æquales, YX, Δ℞, & idem fiat in cæteris ipsis parallelis in figuris, QRY, ZΩΔ, sic productis, & omnium termini sint in lineis, YXR, Δ℞Ω, hæ verò lineæ, sicut & reliquarum figurarum eodem modo producibilium, sint in superficiebus,

Ex antec.

PYR, PYXR. Manifestum est autem figuras, MEGF, MDGE, M CGD, esse æqualiter analogas, & ideò inter se æquales, sicut etiã figuræ, NSTV, NOTS, NBTO, pariter inter se sunt æquales, & quecunq; aliæ sunt in eodem plano, ex quo habemus etiam solida, AMEGF, AMDGE, AMCGD, esse æqualiter analoga, & ideò inter se æqualia. Eodem modo ostendemus solida, PQRY, PRX Y, pariter inter se æqualia esse. Quotuplex est ergo solidum, AM CGF, ex tribus, AMCGD, AMDGE, AMEGF, compositum, totuplex est figura, MCGF, ex tribus, MCGD, MDGE, MEGF, cõposita, figuræ, MEGF. Similiter quotuplex est solidum, PQRX, ex duobus, PQRY, PYRX, compositum ipsius, PQRY, totuplex est basis, QRX, ex duabus, QRY, YRX, composita, fig. QRY; ita vt habeamus æquè multiplices primæ, & tertiæ, necnon secundę, & quartę magnitudinis. Cum autem figuræ, FMCG, VNBT, sint æquè multiplices figurarum, MEGF, NSTV, & pariter figuræ, QRX, ZΩ℞, sint æquè multiplices figurarum, QRY, ZΩΔ, ipsæ

ipsæ verò figuræ, MEGF, QRY, NSTV, ZΩΔ, sint proportionales, & homologæ, MEGF, NSTV, ideò si figura, MCGF, fuerit æqualis figuræ, QRX, etiam figura, NBTV, erit æqualis figuræ, ZΩ℞, & quælibet alia in solido, AMCGF, sibi respondenti in alio solido, PQRX, vnde & solidum, AMCGF, æquabitur solido, PQ RX. Et si figura, MCGF, superauerit figuram, QRX, eodem modo ostendemus, quod solidum, AMCGF, superabit solidum, P QRX, & si illa superabitur, etiam hoc superabitur, ergo prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam, hoc est solidum, AMEGF, ad solidum, PQRY, erit vt figura, MEGF, ad figuram, QRY, vel vt figura, NSTV, ad figuram, ZΩΔ, vel vt alia quælibet eiusmodi in solido, AMEGF, ad sibi respondentem in alio solido, PQRY, hoc est ad existentem in eodem cum ipsa plano quod ostendere oerat. Dicantur autem figuræ proportionaliter analogæ, iuxta regulas, MEGF, QRY.

Conuers. Defin. 4. Qui. El.

Ex 1. huius.

Defi. 5. Qui. El.

ANNOTATIO.

HÆc, & antecedens methodo Indiuisibilium ostensæ quoq; fuerunt Lib. 2. Prop. 4. cum verò prima, secunda, & tertia Prop. eiusdem libri sint illius methodi fundamenta, hinc opus erit in præsenti Lib. quascumq; illas subsequentes, & ex dicta indiuisibilium methodo Propositiones dependentes, aliter demonstrare, vt vel scrupoloso cuiq; Geometrę satisfiat. Igitur ab hac Lib. 2. Propos. 4. incipientes, curabimus, vt, quę per illam methodum vera esse demonstrata sunt, etiam per noua hæc fundamenta confirmentur. Primi Lib. autem Prop. nullatenus à dicta methodo pendere manifestum est circa nonnullas tamen obiter prius hæc pauca maioris facilitatis gratia libuit declarare.

In Prop. 4. igitur Lib. primi sciat Lector tacitè supponi omnes vertices datę figuræ, respectu eiusdem regulę assumptos, esse in eadem recta linea regulæ parallela; seu, pro figuris solidis, in eodem plano regulæ æquidistante, diffinitionibus conformiter; quod ob sui claritatem inter axiomata poterat recenseri.

In Prop. 26. prætermissa fuit demonstratio præsentis casus, cum nempe, AG, contingit esse perpendicularem, GV, & hoc cum facile, intellecto difficiliori casu (qui ibidem explicatur) hoc probari posset; concludetur autem hoc modo, quod prætendimus, nempe in tali casu etiam, KY, esse perpendicularem ipsi, YΔ, & secunda plana, AV, KΔ, ad plana, HV, & Δ, æquè ad eandem partem inclinari. Sit, AG, ad, GP, vt, KY, ad, YX, iunctis, AP, PE, KX, X T, &

T, & cæteris vt ibidem constructis, eodem modo prius ostendemus vt ibi triangula, AFE, KZT, necnon, AFG, KZY, EFG, TZY, & AGE, KYT, esse inter se similia, & angulum, PGE, æquari angulo, XYT. Hoc supposito, cum, PG, ad, GA, sit vt, XY, ad, YK, &, AG, ad GE, vt, KY, ad, YT, ex æquali, PG, ad GE, erit vt, XY, ad, YT, & sunt circa æquales angulos, PGE, XYT, ergo triangula, PGE, XYT, sunt similia, ergo, PE, ad, EG, est vt, XT, ad, TY, &, GE, ad, EA, vt, YT, ad, Tk, ergo, PE, ad, EA, est vt, XT, ad, TH, & sunt circa rectos, PEA, XTK, ergo triangula, PEA, XTk, sunt similia, ergo, AP, ad, PE, erit vt, KX, ad, XT, sed &, PE, ad, PG, est vt, XT, ad, XY, ergo, AP, ad, PG, erit vt, KX, ad, XY, &, PG, ad, GA, est vt, XY, ad, Yk, ergo triangula, APG, kXY, sunt similia, rectus autem est angulus, AGP, cum rectus ponatur, AGV, ergo, kYX, &, KYΔ, rectus erit, vnde anguli, AGV, kYΔ æquales erunt. Cum verò quadratum, PA, æquetur quadratis, PG, GA, seu quadratis, PG, GE, EA, & quadratum PA, æquetur etiam quadratis, PE, EA, duo quadrata, PE, EA, æquabuntur tribus quadratis, PG, GE, EA, & ablato communi quadrato, EA, erit quadratum, PE, æquale quadratis, PG, GE, vnde angulus, PGE, rectus erit, & consequenter etiam rectus ipse, XYT, vnde anguli, AGE, kYT, erunt inclinationes secundorum planorum, AV, KA, cum subiectis planis, HV, &Δ, & inter se æquales, per quæ supposito casui satisfieri manifestum est.

6. Sex. Ele. — 6. Sex. Ele. — 5. Sex. Ele. — 47. Primi Elem. — 48. Primi Elem. — Defin. 6. Vnd. Ele.

In Lemmate 5. post Prop. 8. prætermissa fuit demonstratio præsentis casus, cum eadem facilis existimaretur, nempè quando, FE, FG, cum, AE, AG, &, LI, LM, cum, HI, HM, concurrere minimè posse contingat, vt cum angulos, EAF, GAF, IHL, MHL, rectos, vel recto maiores acciderit esse: Sic autem tum hic, tum suppositus ibi casus poterit vniuersaliter demonstrari. Intelligantur ipsæ, AE, AF, AG, HI, HL, HM, inter se æquales, & iungantur, EF, FG, EG, IL, LM, IM: Cum ergo anguli, FAG, LHM, supponantur æquales, & latera, FA, LH, &, AG, HM, æqualia, erunt pariter bases, FG, LM, æquales: Sic autem probabimus tum, EF, IL, tum, EG, IM, inter se æquales esse. Rursus suspensa pyramide, AEFG, ponatur, F, in, L, demittaturq; FG, super, LM, cui congruet, & triangulo, EFG, cadente super, ILM, punctum, E, pariter erit in, I; Sed & punctum, A, dico fore in, H, tres enim sphæricæ superficies super centris, I, L, M, radijs inuicem se secantibus descriptæ, nempè radijs, HI, HL, HM, seu, AE, AF, AG, in duobus tantum punctis sese decussare possunt, vt facile ostendi potest, duæ enim quælibet sphæricæ superficies in circuli periphæria se secabunt, tertia verò hanc peripheriam diuidet in duobus punctis, quę sunt ab ambas partes plani, ILM, nempè vnum supra alterum infra ipsum, quare non ad aliud punctum, quam ad, H, concurrēt tres rectæ lineæ, AE, AF, AG, ad eandem partem plani, ILM, cum ipsis, HI, HL, HM, constitutæ, ergo, AF, cadet in, HL, AE, in, HI, &, AG, in, HM, quibus præostensis, reliquum demonstrationis, vt ibi, prosequemur.

4. Primi Elem. — 7. Primi Elem.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

Parallelogramma in eadem altitudine existentia inter se sunt vt bases.

Sin in figura Prop. 5. lib. 2. parallelogramma, AM, MC, in eadem altitudine. Dico eadem esse inter se, vt bases, GM, MH. Hoc autem manifestum est, sunt enim dicta parallelogramma figuræ proportionaliter analogæ, iuxta ipsas bases, cum sit, GM, ad, MH, vt, DE, ad, EI, &, DI, ducta sit vtcumque, vnde patet propositum etiam independenter à methodo Indiuisibilium.

Ex 2. huius.

ANNOTATIO.

Propositionis 5. Lib. 2. prior pars pendet quidem ab Indiuisibilium methodo, verum pars posterior, necnon Prop. 6. 7. & 8. absq; illa methodo, vt intuenti apparebit, ostenduntur, quapropter, cum ab eadem exemptę sint, non indigent vt restaurentur, sed illas tamquam stylo veteri demonstratas, vt veras in hoc libro quoq; vsurpabimus, quod etiam de alijs Propositionibus fiet, quę à methodo Indiuisibilium immediatę pendere non conspiciuntur, etiamsi mediatè ab eadem vtiq; dependere competiantur, sufficiet enim illas Prop. de nouo ostendere, quę immediatè ab ipsa methodo Indiuisibilium fidem sumpsisse videbuntur. Cum verò subsequentes Propositiones, in quibus parallelogrammorum omnia quadrata, seu omnes figurę similes, regulis basibus, examinantur, sint in gratiam cylindricorum, prima verò tantum pendeat ex methodo Indiuisibilium, propterea illa erit denuò ostendenda, quam nunc subiungo.

THEOREMA V. PROPOS. V.

Cylindrici in eadem altitudine existentes inter se sunt vt bases.

Ma-

Coroll. 1. lib. 2. Manifesta est similiter hæc Prop. cum enim secto quolibet cylindrico plano æquidistanter basi, producatur in eo figura æqualis ipsi basi, propterea vt basis ad basim, sic erit figura ad figuram ab eodem plano basibus æquidistante etcumq; productam, ergo hi cylindrici erunt figuræ proportionaliter analogæ, iuxta ipsas bases,
3. huius. ergo cylindrici æquè alti erunt inter se vt bases.

ANNOTATIO.

HOc demonstrato haud difficile erit stylo veteri ostendere cylindricos existentes in eadem basi esse inter se vt altitudines, vel vt latera æqualiter basibus inclinata.

Similiter eosdem habere inter se rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel laterum æqualiter basibus inclinatorum. Et eos qui habent bases altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas æquales esse; Vel æquales, bases haberet altitudinibus, seu lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas atq; similes cylindricos esse in tripla ratione laterum homologorum. Sufficiet namq; nos methodum imitari, qua demonstrata Prop. 9. lib. 2. postmodum reliquæ vsq; ad Prop. 14. ostensæ fuerunt, probando circa cylindricos, quod ibi circa omnia quadrata datorum parallelogram. ostendebatur. Hæc autem pro cylindricis postea collecta sunt in eodem lib. 2. Prop. 34. Cor. 4. generali à sec. B. vsq; ad sec. G. quæ quidem animaduertere opus erat.

In Prop. 15. eiusdem lib. 2. hæc supplenda videntur. In Sec. A. probatur figuram, KQM, ipsi, ABD, &, ΠTΩ, ipsi, φΣA, æqualem esse ex Prop. 3. eiusdem, nempè ex methodo Indiuisibilium, hoc autem patebit etiam ex prop. prima huius, sunt enim dictæ figuræ æqualiter analogæ. In sec. B. figuram, MZP, adæquari ipsi, KQM, &, ΩR&, ipsi, ΠTΩ, eodem modo deducetur ex prima huius. In sec. C. probabitur vt, MP, ad, PO, ita esse figuram, MZP, ad, OZP, ex prop. 2. huius. In sec. D. similiter ostendemus figuram, OZP, ad figuram, ΩR&, esse vt, ZP, ad, R&, similiter ex prop. 2. huius. Cætera verò absq; methodo indiuisibilium subsistunt; vt & Corollaria, & prop. 16.

In Prop. 17. eiusdem lib. 2. hæc pariter supplenda sunt. In sec. A. elicitur ex 3. pariter lib. 2. solidum, HZ∞, æquari solido, ABPC, &, ΣΓ2, solido, VΠ&Ω, cum verò hæc solida sint figuræ æqualiter analogæ vt eorum conditiones expendenti patebit, ideò quod ibi ex 3. lib. 2. hic ex prima huius deducemus. In sec. B. solidum, LDGF, æquari ipsi, HZ∞, &, 3687, solido, ΣΓ2, pariter ex prima huius colligemus. In sec. D. quod figura, LED, ad, OED, sit vt, LE, ad, EO, seu quod figura, QAMY, ad, TIMY, sit vt, QY, ad, YT, idest vt, LE, ad, EO, vel quod figura, LFE, ad, OFE, sit vt, LE, ad, EO, patet, ex prop. 2. huius: Quod verò solidum, LDFE, ad solidum, ODFE, sit vt figura, LEF, ad figuram, OEF, idest vt, LE, ad, EO, manifestum est pariter ex 3. huius. In sec. F. solidum, ODFE, ad solidum, 3674, esse vt figura, EDF, ad figuram, 467, patebit ex 3. huius, sunt enim dicta solida figuræ proportionaliter analogæ vt consideranti manifestum erit. Cætera huius prop. cum Cor. & prop. 18. absq; methodo Indiuisibilium subsistunt, vt examinanti facilè apparebit.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

QVæcunq; de parallelogrammis ostenduntur in Prop. 5. 6. 7. & 8. Lib. 2. eadem etiam de triangulis, conditiones ibi suppositas circa suas bases, & altitudines, seu latera æqualiter basibus inclinata, habentibus, verificantur.

Hæc Propositio manifesta est, cum enim exposito quocunq; triangulo, & assumptis duobus quibusuis lateribus angulum quelibet continentibus parallelogrammum compleri possit in illo angulo, cuius triangulum erit dimidium, ideò quæcunq; triangula erunt, vt eorum completa parallelogramma, habentibus autem triangulis circa bases, & altitudines, seu latera æqualiter basibus inclinata, præfatas conditiones, eam pariter habent completa parallelogramma, & de illis verificantur ea, quæ in dictis propositionibus fuerunt proposita, ergo eadem de eorum medietatibus, hoc est de dictis triangulis verificabuntur. Triangula ergo, quæ sunt in eadem altitudine inter se sunt, vt bases; Et quæ sunt in eadem, vel æqualibus basibus, vt altitudines, vel vt latera, quæ æqualiter basi, seu basibus, inclinantur. Habent inter se rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel laterum æqualiter basibus inclinatorum. Habentia bases altitudinibus, vel lateribus basibus æqualiter inclinatis, reciprocas, sunt æqualia; Et quæ sunt æqualia bases habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas. Et tandem similia triangula sunt in dupla ratione laterum homologorum; Quæ omnia etiam Lib. 2. Prop. 19. Coroll. 1. ex methodo Indiuisibilium colligebantur.

34. Primi Elem.

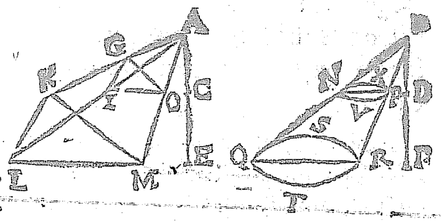
4. huius, cum Annot.

tur. Coroll. 2. autem spectat ad dictam methodum pertractandam, propterea non opus est, quod aliter ostendatur: Lemma verò antecedens Propos. 20. stylo veteri demonstratur, sicut & ipsa Propos. 20. & 21. quorum Corollaria haud nobis opus est aliter demonstrare, cum eorum vsus non sit, nisi pro methodo Indiuisibilium.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Conici in eadem, vel æqualibus altitudinibus existẽtes inter se sunt vt bases.

Sint quicunq; conici in eadem, vel æqualibus altitudinibus, A
E, BF, existentes, AKLM, BSQTR. Dico hos esse inter se, vt ip-
sorum bases, KLM, SQTR. Abscissis enim ab altitudinibus, AE,
BF, vtcunq; partibus æqualibus versus, A, B, ipsis, AC, BD, per,
C, ducatur planum basi, K
LM, æquidistans, & per,
D, similiter planum basi,
SQTR, æquidistans, qui-
39. lib. 1. bus in conicis producan-
41. lib. 1. tur figuræ, GIO, XNVP,
erit ergo, GIO, similis ipsi,
KLM, quarum latera ho-
mologa, IO, LM, simili-



ter, XNVP, erit similis basi, SQTR, ducto autem plano transeun-
te per altitudinem, BF, secetur basis in recta, QR, vtcunque, &
figura, XNVP, in recta, NP, superficies verò conicularis in rectis,
BQ, BR, erunt ergo hæ similiter secta in punctis, N, P, ac, BF, in,
17. Vnde. Elem. D, sicut etiam, AK, AL, AM, erunt similiter secta in punctis, G, I,
31. lib. 1. O, ac, AE, in, C, &, QR, NP, latera homologa similium figura-
rum, SQTR, XNVP, sunt autem etiam, AE, BF, altitudines æqua-
les similiter sectæ in punctis, C, D. Cum ergo figura, KLM, simi-
15. lib. 2. lis sit ipsi, GIO, habebit, KLM, ad, GIO, duplam proportionem
eius, quam, LM, ad, IO, vel, MA, ad, AO, vel, EA, ad, AC, seu,
FB, ad, BD, vel, RB, ad, BP, vel tandem eius, quam habet, QR,
ad, NP, sed etiam figura, SQTR, ad, XNVP, habet duplam ratio-
nem eius, quam habet, QR, ad, NP, ergo figura, KLM, ad, GIO,
est vt, SQTR, ad, XNVP, & permutando figura, KLM, ad, SQT
R, erit vt figura, GIO, ad figuram, XNVP, & puncta, C, D, sum-
pta sunt vtcunque, ac conici, AKLM, BSQTR, sunt in æquali-
bus altitudinibus, AE, BF, respectu basium, KLM, SQTR, assum-

ptis,

ptis, ergo sunt figuræ proportionaliter analogæ, ergo dicti cylindrici erunt inter se, vt bases, KLM, SQTR, quod erat demonstrandum. 3. huius.

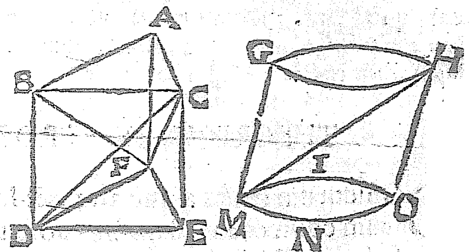
COROLLARIVM.

Cum verò etiam cylindrici in eisdem basibus, & altitudinibus prædictis æqualibus, sint inter se, vt ipsæ bases, propterea erũt etiam inter se, vt ipsi conici, vnde si in vna specie cylindricorum, & 5. huius. *conicorum ostensum fuerit, cylindricum triplum esse conici in eadem basi, & altitudine cum eo existentis, illicò hoc etiam de reliquis speciebus cylindricorum, & conicorum facilè colligemus.*

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

Quilibet Cylindricus triplus est Conici in eadem basi, & altitudine, cum eo existentis.

Sit quicunq; cylindricus, GO, & conicus in eadem basi, IMNO, & eadem altitudine cum ipso. Dico cylindricum, GO, triplum esse conici, HIMNO. Exponatur enim prisma, AFDE, triangulares habens bases, ABC, FDE, altitudinis æqualis altitudini cylindrici, GO, in basi verò, FDE, sit pyramis, CDFE; erit ergo prisma, ADEF, triplum pyramidis, C



DEF, cum resoluatur in tres pyramides æquales, FDBC, FDEC,
FBAC, vt ostendit Euclides Vnd. Element. Prop. 7. vt autem se Ex ant.
habet prisma, ADEF, ad pyramidem, CDEF, ita se habet cylin-
dricus, GO, ad conicum, HIMNO, ergo, GO, triplus est conici, H
MO, vnde omnis cylindricus triplus est conici in eadem basi, & al-
titudine cum eo constituti, illi enim conici, qui sunt in eadem ba-
si, & altitudine ex ant. omnes inter se sunt æquales, quod osten-
dendum erat.

ANNOTATIO.

PEr ant. prop. satisfit prop. 22. lib. 2. ex ea enim pariter habetur omnes cylindricos eandem rationem habere ad conicos in eadem basi, & altitudine cum ipsis existentes, cum eorum esse triplos fuerit demonstratum, & eadem, quæ ex ipsa deducebantur, hic pariter colliguntur, proprietates inquam illæ, quas cylindricis competere dictum est in Annot. prop. 5. huius. Sic ergo ratum, ac firmum est, Conicos in eadem, vel æqualibus basibus existentes, esse inter se vt altitudines. Habereq; rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum. Eos verò, quorum bases altitudinibus reciprocantur, æquales esse, & æqualium bases altitudinibus reciprocari. Ac tandem similes conicos esse in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum eorundem basium, seu similium triangulorum per verticem traseuntium, quæ in ipsius prop. 22. Cor. Sectionibus, in gratiam Conicorum pariter colligebantur. Per hanc etiam satisfit prop. 24. eiusdem lib. 2. cum per eam ibi demonstrati intendatur cylindricum quemcūq; triplum esse conici in eadem basi, & altitudine cum eo existentis, vt in Sec. I. Cor. 4. gen. prop. 34. postea declaratur. Aduerte autem, quod pag. 79. lin. 15. hæc verba, *& cum omnibus quadratis duorum triangulorum CBM, EMF*, ponenda sunt, post hæc verba, *dupla erunt omnium quadratorum, AF*.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

COnicorum frusta æquè alta, & in basibus æquè altorum conicorum, à quibus abscinduntur, constituta; inter se sunt vt bases.

Videatur schema prop. 7. huius, in quo sint conicorum æquè altorum, AkLM, BSQTR, frusta, GIOLKM, XVTS, in eisdem cum illis basibus, kLM, SQTR, & in æqualibus altitudinibus, CE, DF, existentia, igitur abscissis versus puncta, C, D, altitudinum partibus æqualibus, & per earum terminos ductis planis basibus parallelis, ostendemus ab ijsdem productas in frustis figuras esse 5. huius. inter se vt ipsæ bases eodem modo, quo ibi factum est, vnde patebit dicta frusta esse figuras proportionaliter analogas, quapropter ipsa esse inter se vt bases pariter concludemus, quod erat demonstrandum.

CO-

COROLLARIVM.

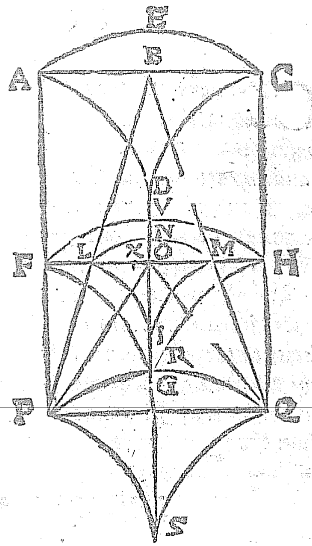
CVm verò etiam cylindrici in basibus dictorum frustorum, & in æqualibus cum eisdem altitudinibus constituti, sint inter se vt bases, erunt etiam inter se vt dicta frusta, & permutando habebunt 5. huius. *eandem rationem ad dicta frusta, vnde proposito quocunq; frusto conico, & cylindrico in eadem basi, & altitudine, cum eo existente, vt rationem cylindrici ad frustum conicum inueniamus, sufficiet alicuius cylindrici præfatæ altitudinis rationem ad frustum conicum in eadem basi, & altitudine cum eo existens inuenire, ex ea enim propositi cylindrici, & frusti conici ratio illicò apparebit. Per hanc autem Propos. satisfit etiam Prop. 27. Lib. 2. & Sect. K. Cor. 4. gen. 34. eiusdem Lib. 2. vbi contenditur probare, conicorum frusta in eadem basi, & altitudine existentia, esse inuicem æqualia, hoc enim per hanc Prop. manifestum est.*

THEOREMA X. PROPOS. X.

CYlindricus ad frustum conicum quodcunq; in eadem basi, & altitudine cum eo constitutum (sumptis duabus homologis in oppositis basibus frusti conici) eam habet rationem, quam quadratum maioris homologarum ad rectangulum sub ambabus homologis, vna cum tertia parte quadrati differentiæ earundem. Idem verò frustum ad conicum in eadem basi, & altitudine, cum eo existentem, erit vt rectangulum sub maiori, & tripla minoris, vna cum quadrato diferentiæ earundem homologarum, ad maioris quadratum.

Sint in quacunque basi, PRQS, & eadem altitudine cylindricus, FQ, frustum conici, BPRQS, nempè, LNMISR, in basi minori quoque, LNMI, & conicus, OPRQS, secto autem quomodocunq; conico plano per verticem acto, producatur triangulum, BPQ, secans oppositas bases frusti conici in rectis, LM, PQ, quæ erunt homologæ similium figurarum, LNMI, PRQS, similiter, eodem extenso plano, ac completo cylindrico in eadem altitudine cum conico, BRS, secentur eius oppositæ bases, necnon figura, FVHG, ab eodem plano in rectis, AC, FH, PQ. Dico ergo Coro. 22. l. 1.

cylin-



cylindricum, FQ, ad frustum conici, NISR, eandem rationem habere, quam quadratum, PQ, ad rectangulum, sub, PQ, LM, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentiæ earundem. Idem verò frustum ad conicum, OPQ, esse vt rectangulum sub, PQ, & tripla, LM, vna cum quadrato differentiæ earundem, ad idem quadratum, PQ. Etenim cylindricus, FQ, ad frustum conici, NISR, habet rationem compositam ex ratione cylindrici, FQ, ad cylindricum, AQ, idest ex
Annot. p. 5. huius. ratione, FP, ad, PA, vel, LP, ad, BP, vel excessus, PQ, super, LM, (qui sit, FX,) ad, PQ, & ex ratione cylindrici, AQ, ad conicum, BSR, idest ex
8. huius. ea, quam habet, PQ, ad $\frac{1}{3}$. PQ, & tandem ex ratione conici, BSR, ad frustum, ISRN, quæ est eadem ei, quam habet cubus, PQ, vel, FH, ad parallelepipedum ter sub, HX, & quadrato, XF, ter sub, FX, & quadrato, XH, cum cubo, FX, est enim conicus, BSR, simi-
Ex diff. 7. l. 1. lis conico, BIN, & ideò, BSR, ad, BIN, est vt cubus, PQ, vel, FH,
Annot. p. 8. huius. ad cubum, LM, seu ad cubum, XH, vnde cum cubus, FH, æquatur cubis, FX, XH, cum parallelepipedis ter sub, FX, & quadrato, XH, & ter sub, HX, & quadrato, XF, ideò per conuersionem rationis conicus, BSR, ad frustum, ISRN, erit vt cubus, FH, ad
38. lib. 2. parallelepipedum ter sub, FX, & quadrato, XF, ter sub, XF, & quadrato, HX, cum cubo, HX. Duæ rationes autem nempè, quā habet, FX, ad, PQ, &, PQ, ad sui $\frac{1}{3}$. componunt rationem, FX, ad $\frac{1}{3}$. PQ, vel triplæ, FX, ad, PQ, seu, FH, vel, sumpto pro communi basi quadrato, FH, componunt rationem parallelepipedi sub tripla, FX, & sub quadrato, FH, ad cubum, FH, quæ proportio cum ea, quam diximus habere cubum, FH, ad parallelepipedum ter sub HX, & quadrato, XF, ter sub, XF, & quadrato, HX, cum, cubo, FX, componit rationem parallelepipedi sub tripla, FX, & quadrato, FH, ad parallelepipedum ter sub, HX, & quadrato, XF, ter sub, XF, & quadrato, HX, cum cubo, XF, ergo cylindricus, FQ, ad frustum, ISRN, erit vt parallelepipedum sub tripla, FX, & quadrato, FH, ad dicta sex parallelepipeda cum cubo, FX, vel vt eorum sub tripla, idest vt parallelepipedum sub, FX, & quadrato, FH, ad

H, ad

H, ad parallelepipedum sub, FX, & quadrato, XH, sub, HX, & quadrato, XF, cum $\frac{1}{3}$. cubi, XF, hæc tria verò æquantur parallelepipedo sub, FX, & rectangulo, FHX, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, nam parallelepipedum sub, HX, & quadrato, XF, idem est cum parallelepipedo sub, FX, & rectangulo, FXH, quod si ipsum iunxeris parallelepipedo sub, FX, & quadrato, XH, simul cum $\frac{1}{3}$. cubi, FX, idest vna cum parallelepipedo sub, FX, & $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, (cum sit communis altitudo) fiet parallelepipedum sub, FX, & rectangulo, FXH, cum quadrato, XH, idest sub, FX, & rectangulo, FHX, & sub $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, igitur cylindricus, FQ, ad frustum, ISRN, erit vt parallelepipedum sub, XF, & quadrato, FH, ad parallelepipedum sub, XF, & rectangulo, FHX, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, idest vt quadratum, FH, vel quadratum, PQ, ad rectangulum sub, FH, HX, vel sub, PQ, LM, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, differentiæ ipsarum homologarum, PQ, LM. Quoniam verò conicus, OSR, est $\frac{1}{3}$. cy- 8. huius.
lindrici, FQ, idcircò ad idem frustum, ISRN, conicus, OSR, erit vt $\frac{1}{3}$. quadrati, PQ, ad rectangulum sub, PQ, LM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, vel vt quadratum, PQ, ad rectangulum sub, PQ, & tripla, LM, cum quadrato, FX, & conuertendo frustum, ISRN, ad conicum, OSR, erit vt rectangulum sub, PQ, & tripla, LM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, FX, differentiæ earundem homologarum, ad quadratum, PQ, quæ ostendere opus erat.

ANNOTATIO.

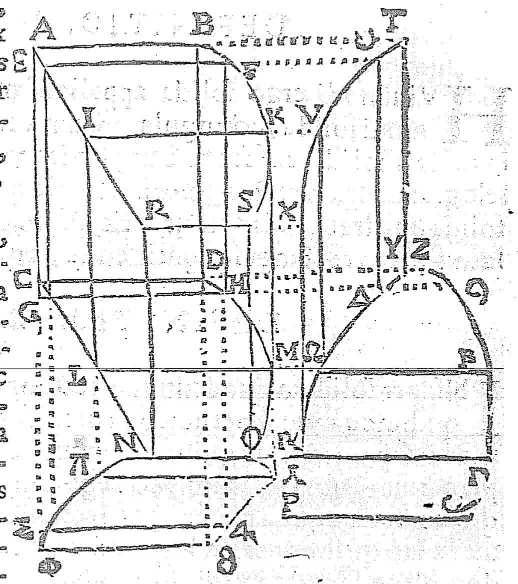
PEr superiorem autem demonstrationem suppletur prop. 28. l. 2. necnon ei, quod colligitur in sec. L. & M. Cor. 4. gen. 24. eiusdem l. 2. Cor. autem prop. 28. est in gratiam methodi indiuisibilium. Quod prop. 29. eiusdem l. 2. si intelligamus in eius figura latera, CD, DB, describere similes figuras planas, in quibus tā quam in basibus cylindrici consistant, quorum latera sint, CD, pro figura, DB, & DB, pro figura, CD, ostendemus consimili ibi traditæ demonstrationi cylindricum sub latere, DB, basi figura, DC, ad cylindricum sub latere, DC, basi figura, BD, prædictæ simili esse vt, DC, ad, DB, & sic etiam esse conicum sub lateribus, CB, BD, basi figura, CD, ad conicum sub lateribus, BC, CD, basi figura ipsius, DB, habent enim cylindrici inter se, necnon & conici, rationem, compositam ex ratione basium, & altitudinum, seu laterum æqualiter basibus inclinatorum, vt superius denuò animaduersum est: Annot. p. 5. & 8. huius. Per hæc autem satisfit etiam Sec. N. Cor. 4. gen. 34. eiusdem

eiusdem lib. 2. Circa verò prop. 25. & 26. cum Corollarijs nihil dictum fuit, cum sint lemmaticæ pro methodo indiuisibilium, qua propter restauratione minimè indigere visæ fuerunt; Prop. 33. autem recoletur in examine lib. 3. cum Cor. Prop. 34, consistit independenter à methodo indiuisibilium, vt illius etiam Corollaria, vnde nec ipsa restauranda visa sunt. Veruntamen circa Cor. 4. generale eiusdē prop. 34. superius suis locis adnotata fuerunt, quæ animaduertenda erant. Reliquæ tandem propositiones à 35. vsq; ad finem lib. 2. non pendent ab indiuisibilium methodo, & propterea circa illas nihil nobis dicendum occurrit. Relictâ deniq; fuit vltimo loco prop. 23. cum Corollarij sectionibus, ac prop. 30. 31. & 32. à 23. præcipuè dependentibus cum paulò diligentiorem animaduersionem poposcere viderentur, præsertim verò cum propositione 23. restaurata, aliæ quædam propositiones lemmaticæ, ad rem nostram pertinentes, forent superexstruendæ, vt in sequentibus manifestum erit.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI propositum quodcumq; solidum parallelis quotcumq; planis ita secari possit, vt conceptæ ex secantibus planis in eo figuræ sint semper parallelogramma rectangula, latera verò eadem describentia sint omnia vni cuidam lateri, vt regulæ æquidistantia: Illud superficiebus cylindraceis comprehensum erit.

Sit propositum quodcunq; solidum, ASOC, quod quidem parallelis quotcunq; planis sectum esse supponatur, efficientibus in eo parallelogramma rectangula, EH, IM, latera verò hæc describentia, GH, LM, vt & reliqua omnia præfata parallelogramma pariter describentia, sint vni cuidam regulæ, PQ, æquidistantia. Defin. 3. lib. 1. Dico solidum, ASOC, superficiebus cylindraceis comprehendi. Quod enim superficies, in qua iacent omnia prædicta latera, quæ rectangula describunt (quæ sit, CNOD,) sit cylindracea, manifestum est ex eo, quod omnia vni regulæ, PQ, sint parallela, & eadē ratione superficies, in qua iacent latera rectangulorum prædictis opposita (quæ sit, ARSB,) erit cylindracea. Similiter cum planū, EH, æquidistet plano, IM, &, GH, ipsi, LM, etiam, EG, ipsi, LI, æquidistabit, eodem modo autem etiam ostendemus reliqua latera, quæ præfatis rectangula describentibus lateribus perpendicolariter



riter insistunt, eidē, LI, æquidistare, ex quo concludemus hæc omnia pariter in superficie cylindracea coextendi, quæ sit, ACNR, qua methodo patebit etiam superficiē, BSOD, esse cylindraceam, in qua quidem iacent latera rectangulorū prędictis opposita. Nuc si ducta intelligantur opposita plana solidum, AO, tangentia, ac præfatis secantibus planis æquidistantia, contingere potest, vt ipsorū planorū cōtactus sit ex vtraq; parte, vel in puncto, vel in linea, vel in plano, vel ex vnā parte contactus in vno istorum, ex altera verò in alio promiscuè, vt consideranti facilè innotescet, attamen quomodocunq; res se habeat etiam ratione istorum contactuum fiet, vt dictum solidum cylindraceis superficiebus comprehendatur, si enim contactus ex neutra parte fiat in plano, dictum solidum non alijs superficiebus cylindraceis, quam ijs, quæ dictæ sunt comprehendetur, vt manifestum est, si vero contactus fit in plano, illud erit parallelogrammum rectangulum, vt, AD, RO, cum enim hæc tangentia plana æquidistent planis secantibus, quę transeunt per latera cylindrici, cuius, ACNR, BDOS, sunt superficies, etiam ipsa per eiusdem latera transibunt, ergo, AC, BD, sicut etiam, RN, SO, per quæ transeunt dicta tangentia plana, ipsis, EG, FH, æquidistabunt, quo pacto ostendemus etiam, AB, CD, RS, NO, ipsis, EF, GH, pariter æquidistare, ergo plana contactuum, AD, RO, erunt parallelogramma rectangula, ergo & ipsa erunt superficies cylindraceæ, ergo etiam ratione contingentium planorum secantibus planis æquidistantium præfatū solidū superficiebus cylindraceis comprehendi manifestum est, quod ostendere opus erat. 9. l. 11.

DEFINITIO. A.

HVIusmodi ergo solida appellabimus nomine communi solida rectangula. Cum verò vnumquodque in eisdem solidis ex secantibus planis productorum parallelogrammorum rectangulorum fuerit quadratum, etiam solida quadrata vocabuntur. Et ipsorum regulæ, quibus latera plana rectangula continentia, æquidistant.

DEFINITIO. B.

INsuper solidum quodcunque rectangulum sub duabus quibuscunque superficiebus dicetur contineri (regulis ijsdem supradictis) in quibus vnumquodq; ęquidistantium planorum, ipsum solidum rectangulum ita secantium, vt dictum fuit, æqualia latera per sectionem isdem designauerit, sub quibus parallelogrammum rectangulum, ab eodem plano secante in solido productum, continetur. Et cum fuerit solidum quadratum poterit etiam appellari, solidum quadratum alterutrius dictarum superficierũ ipsum continentium. Ipsas verò superficies, æqualia rectangulorum planorum latera capientes, homologas pariter nuncupabimus, regula quocunq; dictorum easdem secantium planorum.

ANNOTATIO.

IVxta ergo suprapositas definitiones manifestum est, quasnam conditiones habere debeant ea solida, quæ vocantur solida rectangula: Erit igitur, ASOC, rectangulum solidum: quod si, AD, EH, IM, RO, & cætera huiusmodi plana fuerint quadrata, poterit etiam dici, ASOC, quadratum solidum: Ipsius autem regulæ erunt ex. g. NO, OS, quibus latera rectangula continentia æquidistant. Esto nunc, quod parallela plana, quæ in solido, AO, rectangula, AD, EH, IM, RO, genuerunt, indefinitè producta occurrerint ex. g. tribus superficiebus, TX℞Y, DOΓZ, φNOΛ8, in quibus per sectionem designauerint, TY, æqualem ipsi, BD, & φ8,

φ8, æqualem, CD, similiter, & Δ, VΩ, λ℞, deinceps æquales ipsis, FH, kM, SO, sicut etiam, ΣΛ, ΠΛ, NO, deinceps æquales ipsis, GH, LM, NO, & in superficie, DZΓO, ipsas, DZ, H9, Λβ, CΓ, deinceps æquales eisdem, BD, FH, KM, SO, & cætera plana parallela similiter se habuerint (ipsę autem superficies, BO, DΓ, T℞, inter se, vti etiam, CO, φO, inter se, erunt homologæ, regula quocunq; dictorum easdem secantium planorum inter se æquidistantium.) Dicimus ergo solidum rectangulum, AO, nedum contineri ex. g. sub superficiebus, BDOS, CDON, in quibus iacent latera præfata rectangula continentia, sed etiam sub superficiebus, T℞, CO, vel, T℞, φO, vel sub superficiebus, ΓZDO, ODCN, vel sub, ΓZDO, φNOΛ8, in his enim plana parallela produxerunt latera ijs æqualia, sub quibus parallelogramma rectangula, AD, EH, IM, RO, & cætera huiusmodi continentur, vt dictum fuit, in quo non nihil à modo loquendi in planis discedere videmur, dicitur .n. ex. g. rectangulum planum, AD, contineri sub, BD, DC, quæ rectum angulum constituunt, & non sub, TY, φ8, quæ ipsius rectũ angulum non constituunt, hoc tamen loquendi modo vsus sum, Pri. Def. Sec. Elem. potius soliditatis determinationẽ respiciens, quam continentiam, quæ fit à superficiebus in ambitu contentorum solidorum existentibus, cum enim cernerem non omnes superficies solidum rectangulum vt sic continentes posse in ipsius contenti solidi ambitu reperiri (vt ex. g. cum contineretur duabus superficiebus planis in illius ambitu existentibus, aliæ autem illis homologæ essent curuæ) & tamen latera in his concepta viderem adæquari lateribus rectãgula plana continentibus, & consequenter eorundem areæ quantitatem præscribere, vnde & istæ prædictis homologæ superficies viderentur ipsius contenti soliditatẽ determinare (quęcumq; enim solida sub ipsius contineantur inter se erunt æqualia, vt infra ostẽdemus) ideò volui præfata solida rectangula dici sub omnibus his superficiebus homologis secundum eandem regulam contineri. Quemadmodum si quis aliter ab Euclide diceret parallelogrammũ rectangulum nedum sub lateribus ipsius angulum rectum constituentibus, sed etiam sub quibuscunq; alijs lateribus prædictis æqualibus contineri, subintelligendo non hoc parallelogrammũ in ipsius ambitu necessariò ipsa latera continentia habere, sed per ea siue sint in ambitu, siue non, ipsius areæ quantitatem determinari, parallelogrammum enim rectangulum contentum sub duobus lateribus, iuxta modum loquendi Euclidianum, æquatur cuicumq; parallelogrammo rectangulo sub alijs duobus prædictis æqualibus contento. Quod si quis attendat demonstrationes sec.

 Elem.

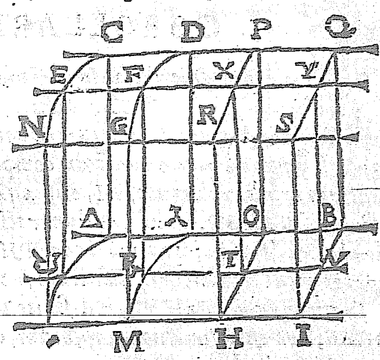
Elem. à prima illius def. dependentes, animaduertet suam sortiri veritatem siue secundum hanc, siue secundum adductam definitionem intelligantur; consimilem autem demonstrationum seriē ex superioribus definitionibus emanantem, inferius & ipsæ subiungam.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

PRoposito quocunq; solido rectangulo iuxta datas regulas, ac sub duabus quibusdam superficiebus contento; indefinita numero solida rectangula pariter dari possunt, iuxta easdem regulas, quorum vnumquodq; proposito solido æquale erit, ac sub eisdem superficiebus continebitur.

Sit propositum quodcunq; solidum rectangulum, POIS, sub duabus superficiebus, QSIB, OBIH, contentum, cuius regulæ sint, HI, IS. Dico indefinita numero solida rectangula regulis eisdem pariter dari posse, quorum vnumquodq; ipsi, POIS, æquale erit, ac sub eisdem superficiebus, QSIB, OBIH, continebitur. Igitur rectangulum solidum, POIS, superficiebus cylindraceis cōprehendetur, illæ ergo superficies indefinitè hinc inde produci intelligantur, in quibus latera signata per plana parallela, in solido parallelogramma rectangula gignentia, vni regulæ, vt ipsi, HI, æquidistant, tales autem sunt superficies, PS, SH, HB, BP, sicut
11. huius. etiam, PH, HS, SB, BP, quarum est pariter regula, SI, cum enim, RI, PB, fuerint parallelogramma rectangula, tam iuxta regulam, HI, quam iuxta, SI, possunt in ipsis rectę lineæ vni cuidam parallelæ designari: Producatur autem ipsæ, PS, SH, HB, BP, hinc inde indefinitè, intelligaturq; similiter in quacunq; productarum superficierum, vt in, OI, producta, existere figura quæcunque, ΔKMλ, homologa, iuxta regulam, RI, ipsi, OHIB, in eadem superficie existenti, deinde per illus ambitum, ΔKMλ, feratur quædam recta linea indeficitè hinc inde producta, semper ipsi, SI, æquidistanter, donec omnem illius percurrerit ambitum, gignens superficies cylindraceas, CΔKN, NM, GMλD, DΔ, abscindensq; a superficie, QR, indefinitè producta superficiem cylindraceam, DCNG. Esto igitur, quod vnum parallelorum planorum in solido, PI, rectangula plana gignentium, vt, quod genuit, XV, indefinitè productum, ita vt secet solidum, CM, in eo produxerit figuram, E℞, quoniam ergo, EF, est parallela ipsi, &℞, nam est portio, EY, quę est parallela ipsi, &V, similiter, E&, est parallela ipsi, F℞, erit, E℞, pa-

parallelogrammum, &, F℞&, est angulus rectus, est enim exterior parallelarum, F℞, XT, & ideò ipsi interiori, XT&, æqualis, erit, E℞, etiam rectangulum, & quia, &℞, æquatur ipsi, TV, sunt .n. ΔM, OI, figuræ homologæ, sicut etiam, F℞, æquatur ipsi, YV, ideò rectangulum, E℞, erit æquale rectangulo, XV. Eadem ratione ostendemus, quæcunq; alia duo rectangula ab eodem dictorum equidistantium plano in ipsis solidis producta ęqualia esse, ergo cum solida, CM, PI, sint in eadem altitudine sumpta regulis eisdem æqualibus rectangulis, cōcluduntur enim



inter extrema plana parallela, quorum contactus est in planis, NM, RI; Cλ, PB, ideò dicta solida erunt æqualiter analoga iuxta di- 1. huius.
ctas regulas, ergo inter se æqualia erunt; & cum superficies, ΔM, sit homologa ipsi, OI, &, DM, ipsi, QI, regula plano, RI, propterea & erit, CM, solidum rectangulum æquale ipsi, PI, & sub eisdē superficiebus, QI, IO, continebitur, & eius regulæ erunt pariter ipsæ, HI, IS. Cum verò in superficie, OI, indefinitè producta, indefinitæ numero figuræ ipsi, OI, homologæ, regula plano, RI, supponi possint, vt facillimè apparet, ideò supradicta methodo tot solida rectangula iisdem superexstrui poterunt, regulis eisdē, quot erunt figuræ ipsi, HP, homologæ, iuxta dictas regulas, idest numero indefinita, quorum vnumquodq; ipsi, PI, adæquari, ac sub eisdem superficiebus, QI, IO, contineri, vt supra ostendemus. Quemadmodū si etiā indefinitè superficies, PH, HS, SB, BP, supra, vel infra producerentur, alia indefinita numero solida rectangula inueniri eodem modo possent, quorum vnumquodque ipsi, PI, adæquari, ac sub eisdem superficiebus, QI, IO, contineri, regulis eisdem, HI, IS, pari ratione probaremus. Hæc autem ostendenda proponebantur.

COROLLARIVM I.

EX supra demonstratis manifestum est, quomodo solidum rectangulum sub duabus datis superficiebus contentum, iuxta datas regulas, in data superficie cylindracea, quæ continentium altera sit ho-

homologæ, deſcribi poſſit, ſuperficies enim CG, deſcribetur & ipſa latera, NG, moto per lineam, NEC, ſemper ipſi, HI, æquidiſtanter.

COROLLARIVM II.

INſuper innoteſcit ſolidum rectangulum quodcunq; eſſe ſemper portionem ſolidam duobus cylindricis ſe ſe inuicem per ſuas ſuperficies cylindraceas decuſſantibus communem, quorum laterum re⸗regulæ ſi ſimul ad vnum punctum componantur, ſibi inuicem perpendiculares erunt, vt regula, HI, cui æquidiſtant latera ſuperficiei cylindraceæ, PSHBP, eſt ad angulum rectum cum regula, IS, cui æquidiſtant latera ſuperficiei cylindraceæ, PHSBP, quod quidem ſolidum, PI, patet gigni ex concurſu dictarum ſuperficierum, ſicut, CM, ex concurſu earundem PSHBP, indefinitè productarum, necnon ipſarum, CKGAC, hoc eſt vnumquodq; ipſorum, CM, PI, eſſe portionem ſolidam communem duobus cylindricis, quorum laterum regulæ ſunt ipſæ, HI, IS, ad inuicem perpendiculares.

COROLLARIVM III.

VLterius patet, quod ſolida rectangula ſub ſuperficiebus homologis iuxta eaſdem regulas contenta, inter ſe ſunt æqualia: Etenim ſi propoſitæ ex. g. eſſent ſuperficies, QI, IO, homologæ ipſis, DM, MΔ, regula plano, RI, & completa fuiſſent ſolida rectangula, PI, CM, eodem modo oſtenſum fuiſſet ipſa inter ſe æqualia eſſe.

COROLLARIVM IV.

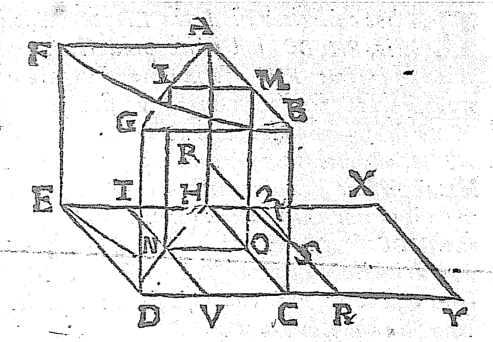
EX hac Prop. & Cor. ant. deniq; apparet, quam congruenter dictum fuerit ſolidum rectangulum nedum ſub duabus ſuperficiebus in eiuſdem ambitu exiſtentibus contineri, ſed etiam ſub duabus alijs quibuſcumq; prædictis homologis, iuxta eaſdem regulas, licet enim diuerſis ſuperficiebus ipſa ſolida comprehendatur, tamen eadem ſemper ſoliditatis quantitas conſeruatur, retentis eiſdem regulis, cuius determinatio cum ex lateribus habeatur, vel rectangula plana dictorum ſolidorum continentibus, vel æqualia ijs, quæ eadem continent, iaceant verò hæc in dictis ſuperficiebus, propterea non incongruè, puto, dictum fuit præfata ſolida ſub talibus quibuſcumque homologis ſuperficiebus, regulis eiſdem, contineri.

THEO-

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SI, expoſitis duabus quibuſcumq; ſolidorum rectangulorum deſcriptibilium regulis, ad vnum punctum cōpoſitis, iuxta eaſdem ſolidum rectangulum contineatur ſub parallelogrammo, & alia quacumq; figura plana in ambitu contenti ſolidi exiſtente, ipſum ſolidum rectangulum erit cylindricus, & figura plana ſuperius dicta erit illius baſis. Quod ſi etiam prædicta figura fuerit parallelogrammum, & ambo in illius ambitu, contentum ijſdem ſolidum rectangulum erit parallelepipedum.

Exponantur duæ inuicem perpendiculares regulæ, BC, CD, ſolidorū deſcriptibliū ſub parallelogrammo, AC, & figura plana quacumque, HDC, ſit autem deſcriptum ſolidum rectangulum ſub eiſdem contentum, AGCH, iuxta regulas, BC, CD, ita tamen vt figura plana, HDC, ſit in ambitu ipſius contenti ſolidi. Dico, AGCH, eſſe cylindricum. Quod. n. AC, CG, GH, ſint ſuperficies cylindraceæ, quarum regula, BC, manifeſtum eſt,



quod verò latera per ſecantia para lela plana in ipſis deſignata ſint æqualia ipſi, BC, lateri parallelogrammi, AC, ex dictis etiam cōſtare poteſt, ſed maioris dilucidationis gratia ſit ab aliquo dictorum ſecantium planorū, in ſolido, AGHC, productum rectangulum, IMON, eſt ergo, IN, æqualis, MO, hoc eſt ipſi, BC, quo pacto idem de cæteris oſtendemus, in parallelogrammo autem, GC, eadem verificantur, & in illi oppoſito, ſi contactus plani ipſi, GC, oppoſiti eſſent in plano, vt manifeſtum eſt, ergo perinde eſt ac ſi latus æquale, BC, ambitū figuræ, HDC, extremo ſui puncto ſemper ipſi, BC, æquidiſtanter Def.3.l.1. percuriſſet ipſam ſuperficiem, ADBH, deſcribendo, erit ergo, AGCH, cylindricus, cuius baſis eſt, HDC, figura. Præfatum quidem ſolidum habet in ambitu figuras ipſum continentes, ſed ſi velimus

limus etiam casum intelligere cum tantum figura plana est in illius ambitu; hoc in schemate ant. prop. facilè percipiemus, in qua sint regulæ, SI, IH, continentes verò figuræ, QI, △M, quarum, QI, supponatur esse parallelogrammum, sed non in ambitu contenti eiusdem solidi, quod sit, CM, △M, verò sit figura plana, quæ debet in ambitu solidi reperiri, igitur consimili methodo ostendemus etiam, CM, esse cylindricum, in basi, △M, constitutum. Quod si continentes figuræ, QI, IO, fuerint ambo parallelogramma, ac in ambitu contenti solidi, quod sit, PI, manifestum est nedum, PI, esse cylindricum, sed etiam esse parallelepipedum, sunt enim plana, RI, PB, parallela, necnon, PH, est superficies plana ipsi, QI, parallela, ac, PS, est plana, necnon ipsi, HB, similiter parallela, quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM I.

Ex hoc colligitur, si, ducta, EH, per, H, parallela, DC, in parallelis, EH, DC, ind finitè productis, reperiatur alia quæcunq; plana figura, vt, EHC, solidum rectangulum sub parallelogrammo proposito, AC, seu illi analoga superficie secundum regulam planum, GC, & sub figura, FHC, in ambitu contenti solidi existente, quod sit, AFCH, ad contentum sub eodem parallelogrammo, AC, seu illi analoga superficie secundum dictam regulam, & sub figura, HDC, dummodo ea sit in ambitu pariter contenti solidi, esse vt figura, EHC, ad figuram, HDC, sunt enim hæc solida, ABFHC, ABGHC, cylindrici in eadem altitudine sumpta respectu basium, EHC, DHC, & ideò sunt inter se vt ipsæ bases, vnde cum ipsæ fuerint æquales etiam dicta solida rectangula æqualia erunt. 5. huius.

COROLLARIVM II.

Habetur insuper si in eodem schemate ducatur in parallelogrammo, AC, quacumq; parallela, HC, vt, RS, constituens parallelogrammum, RG, rectangulum solidum sub, AC, & figura plana ex.g. HDC, contentum, dummodo hæc sit in ipsius ambitu, ad rectangulum solidum sub, RC, & eadem figura, HDC, in huius etiam ambitu existente, seu sub quacumq; alia plana figura in eisdem parallelis cum, HDC, existent, dummodo sit in ipsius ambitu, regulis ijsdem, BC, CD, esse vt parallelogrammum, AC, ad parallelogrammum, CR, seu vt, BC, ad, CS; Et si sint etiam parallelogramma, HV, HD, habetur etiam rectangulum solidum sub, AC, CE, ad rectangulum solidum sub, RC, CT, esse

vt

vt rectangulum, BCD, ad rectangulum, SCV, sunt enim hæc plana rectangula bases dictorum rectangulorum solidorum, quæ ex dictis sunt parallelepipeda, seu cylindrici eiusdem altitudinis sumptæ respectu dictarum basium, & ideò sunt vt ipsæ bases, hoc est vt dicta rectangula, supposito tamen quod continentia parallelogramma sint in ambitu contentorum solidorum.

ANNOTATIO.

POterant quidem exhiberi parallelogramma, AC, RC, in eodē plano cum figuris, EHC, CHD, & in eisdem cum ipsis parallelis, vt, HY, pro ipso, AC, &, HR, pro ipso, RC, & intelligi mētaliter descripta solida rectang. iam dicta sub istis in eodem plano iacentibus fig. prout dictum est, quo pacto eadem intelligi potuissent, sed cum nonnihil difficile captu initio huius nouæ doctrinæ hoc mihi fore videretur, eadem vt supra exhibere malui, veruntamen valde expediet pro sequentibus assuefieri dictorum solidorum mentali descriptioni, exhibitis continentibus eadem fig. (quæ, puto, semper planæ erunt) in eisdem parallelis constitutis, quemadmodum duabus quibuscunq; rectis lineis exhibitis, illico rectangulum sub ipsis mentaliter describere solemus, sicuti & quadratum datæ rectæ lineæ cuiuscumq; absque eo, quod semper in schematibus ipsa descripta exhibeantur, sic ergo & solida rectang. & solida quadrata, sub duabus planis figuris in eisdem parallelis existentibus iuxta datas regulas contenta, ad figurarum confusionem euitandam & nos quoq; mentaliter vt plurimum describemus.

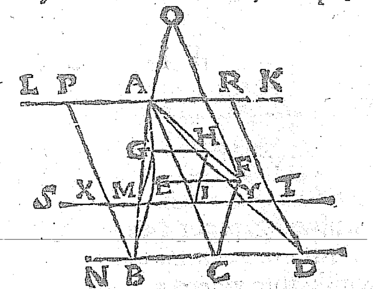
THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI duo triangula fuerint in eisdem parallelis constituta. Solidum rectangolum sub eisdem contentum, regula altera dictarum parallelarum, ac alia quadam illi in sublimi perpendiculari, erit pyramis, habens in basi parallelogrammum rectangulum, sub dictorum triangulorum basibus contentum, dummodo alterum dictorum triangulorū sit in ambitu contenti solidi.

Sint duo triangula in eisdem parallelis constituta, LK, ND, nēpè, ABC, ACD, in basibus, BC, CD, in parallela, ND, dispositis, eleuetur autem à puncto, C, quædam, CF, perpendicularis ipsi, C

Vvv B. D.

B. Dico solidum rectangulum sub duobus triangulis, ABC, ACD, contentum, regulis, BC, CF, esse pyramidem, cuius basis erit parallelogrammum rectangulum sub prædictis basibus, BC, CD, pariter contentum, dummodo alterum dictorum triangulorum sit in ambitu ipsius contenti solidi. Sit enim descriptum ipsum solidum rectangulum sub triangulis, ABC, ACD, contentum, nempè, AE BCF, sit tamen alterum ipsorum, vt, ABC, in ambitu ipsius contenti, solidi, &, AF C, superficies homologa ipsi, ACD, iuxta regulam planū, BCF, erit ergo, ACF, triangulum, esto enim, quod vnū parallelorum ipsi, BF, planorum, solidum, AEC, secantium, in eo effecerit parallelogrammum rectangulū, GMIH, & intriangulo, ACD, rectam, IY, iam scimus, quod, HI, est in eodem plano cum, FC, cui est parallela, & ambo sunt in eodem plano cum, AC, quod etiam de reliquis in superficie, ACF, ipsi, FC, parallelis existentibus eodem modo ostendetur, ergo iacent omnes in plano ipsarum, AC, CF, ergo, ACF, est superficies plana cum vero vt, CD, ad, IY, ita sit, CA, ad, AI, & ita etiam, CF, ad, IH, erit, CF, ad, IH, vt, CA, ad, AI, ergo tria puncta, FHA, erunt in recta linea, in eadem autem esse ostendemus etiam reliquarum ipsi, CF, parallelarum extrema puncta ex hac parte, ergo, ACF, erit triangulum: Consimili autem modo pariter demonstrabimus, ABE, AEF, esse triangula, & est, BF, parallelogrammum rectangulum, ergo solidum, ABF, est pyramis, & eius basis parallelogrammum, BF, quod ostendere opus erat.



Lemma 1. 33. l. 1.

COROLLARIVM I.

Ex hoc pariter intelligi potest, quod solidum rectang. contentum sub trapezijs ex. g. MBCI, ICDY, in eisdem parallelis, SY, ND, existentibus, regulis ijsdem, BC, CF, est frustum pyramidis abscissæ per planum basi, BF, æquidistans, vt, GECI, dummodo alterum dictorum trapeziorum in ambitu contenti solidi consistat.

COROLLARIVM II.

Similiter si compleantur parallelogramma, PC, CR, CO, solidum rectangulum sub, RC, CP, seu sub, OC, CP, contentum, quod est parallelepipedum, triplum erit contenti sub triangulis prædictis idest pyramidis, AEC. Contentum verò sub parallelogrammis, TC, &, CX, ad contentum sub dictis trapezijs hoc est ad frustum pyramidis, GECI, erit vt quadratum, BC, rectangulum sub, XI, IM, vna cum ⅓. quadrat. XM, retentis semper ijsdem reg. BC, CF. Hæc autem vera sunt siue latus, AC, sit commune præfatis triangulis, seu parallelogrammis siue non, ac siue latus, IC, sit cōmune prędictis trapezijs, seu parallelogrammis, siue nōvt facilè intuenti innotescet. 10. huius.

COROLLARIVM III.

Patet vltimo solida rectangula sub dictis triangulis, regulis iam dictis, contenta, se habere inter se, vt ipsæ pyramides, nempè æquè alta esse in proportione basium, & in eadem, vel æqualiqus basibus existentia esse in proportione altitudinem respectu basium assumptarum, quod est simile illi, quod animaduersum est in Cor. 1. & 2. prop. ant. circa parallelogramma solida rectangula continentia.

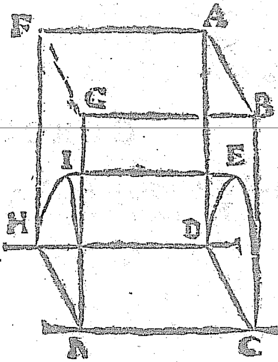
ANNOTATIO.

Aduerte autem cum solidum rectangulum fuerit quadratum, tunc vnam sufficere exponi figuram, vt ex. g. triangulum, ABC, quod tunc æquipollet duobus expositis, ABC, ACD; & contentum solidum sub, ABC, ACD, tunc etiam dicimus quadratum solidum ipsius, ABC, regulis, BC, CF, hæc autem planarum figurarum quadrata solida mentaliter quoque vt plurimum descripta esse intelligemus, vt etiam superius animaduersum fuit. His autem præpositis, nunc illa subiungemus, quæ assimilantur Prop. Sec. Elem. ac iuxta methodum indiuisibilium lib. 2. prop. 23. ostēsa fuere.

THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SI duæ expositæ fuerint superficies solidum rectangulū iuxta datas regulas continentes, altera autem earum fuerit in quotcunq; partes diuisa per lineas secantes quascunq; suæ regulæ intra dictam superficiem parallelas, altera ra autem fuerit indiuisa: Solidum rectangulum sub indiuisa, & sub diuisa contentum, æquabitur solidis rectangulis sub eadem indiuisa, & sub partibus diuisæ, regulis iisdem, contentis.

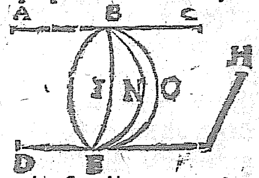
Sint duæ expositæ superficies, AC, CH, solidum rectangulum, FC, iuxta regulas, kC, CB, continentes, earum autem altera, vt, AC, sit diuisa in quotcumq; partes, vt per lineam, DEC, secantem quascumq; intra superficiem, AC, ipsi regulæ, BC, parallelas, in duas partes, DEC, ADECB, ipsa verò, HC, sit indiuisa. Dico solidum contentum sub indiuisa, HC, & sub diuisa, AC, idest, FC, æquari solidis contentis sub, DEC, CH, & sub, DECBA, & sub eadem, CH. Intelligatur ergo quandam rectam lineam ferri per ipsam, CED, indefinitè productam, donec totam percurrerit, ac semper moueri ipsi regulæ, KC, æquidistanter, describet ergo superficiem cylindraceam, quæ sit, KEH, & abscindet à superficiebus, FK, AC, superficies cylindraceas, HIK, DEC, &, HC, est cylindracea, & hoc siue sit in ambitu contenti solidi, siue non, alioquin non possent latera, quæ per solidum, FC, secantia plana, ipsi, GC, æquidistantia signantur in ipsa superficie, HC, omnia vni regulæ, kC, æquidistare, ergo solidum, HIKCED, superficiebus cylindraceis comprehenditur, quarum regulæ sunt, kC, CB, inuicem perpendiculares ergo si solidum, HIkCED, secetur planis ipsi, kB, parallelis fiet in solido parallelogramma ipsi, kB, æquiangula, hoc est rectangula, & ideò dictum solidum erit solidum rectangulum contentum sub, HC, CED, superficiebus: Eodem modo ostendemus, HIkCEDAG, esse solidum rectangulum contentum sub superficie, DIC, hoc est, Dk, illi homologa iuxta planum, BK, ac sub, DECBA, est autem solidum, FC, æquale duobus solidis, HIC, CIHFB, simul sumptis, ergo solidum rectangulum contentum sub indiuisa superficie, HC, & sub diuisa, AC, æquale est solidis rectangulis contentis sub eadem indiuisa, HC, & sub partibus diuisæ, DEC, DECBA, regulis semper iisdem, BC, CK, retentis, quod ostendere opus erat.



CO-

COROLLARIVM I.

Expositа figura plana quacumq; BGEO, in parallelis, AC, DF, & assumptis pro regulis, DF, FH, inuicem perpendicularibus, ita tamen vt, FH, sit extra planum parallelarum, AC, DF, primò colligitur, si ipsa figura per solam lineam, BE, (secantem quascumq; intra eandem figuram, ipsi regulæ, DF, parallelas descriptibiles) diuidatur vtcumq; quadratum solidum sub indiuisa, BGEO, & sub eadem, BGEO, quatenus diuisa, æquari rectangulis solidis sub eadem indiuisa, BGEO, & sub partibus, BGE, BOE.



COROLLARIVM II.

Colligitur secundò rectangulum solidum sub indiuisa, BEO, & sub diuisa, BGEO, æquari rectangulis solidis sub eadem indiuisa, BEO, & sub parte, BEO, hoc est quadrato solido, BEO, & rectangulo solido sub, BEO, BEG.

COROLLARIVM III.

Colligitur tertiò quadratum solidum ipsius, BGEO, æquari rectangulis solidis sub, BGEO, ac, vtriusq; partibus, BEG, BEO, per Cor. prim. & subinde æquari quadratis partium, BEG, BEO, vna cum rectangulo bis sub eisdem partibus, BEG, BEO, per Cor. ant.

COROLLARIVM. IV.

Colligitur quartò, si linea, BIE, bifariam, BNE, verò non bifariã secent dictas ipsi, DF, parallelas: Rectangulum solidum sub indiuisa, BNEO, & sub diuisa, BGEN, per ipsam, BIE, æquari rectangulo solido sub eadem indiuisa, BNEO, & sub partibus, BIEN, BGEI, diuisæ, hoc est æquari rectangulo sub eadem, BNEO, & sub, BIEO, cum solido rectangulo sub, BOEN, BNEI, cui si addatur quad. solidum, BIEN, (ex quibus integratur rectang solidum sub, BIEO, BIEN, per Cor. primum) fiet quadratum solidum, BEO, cui æquabitur rectangulum solidum sub, BGEN, BNEO, cum quadrato solido figuræ, BIEN, intermediæ secantibus lineis, BIE, BNE, liceat autem, cum dicimus rectangulum solidum sub duabus figuris, subintelligere semper contentum, breuitatis gratia, etiam si non exprimatur, vt in planis fieri consueuit.

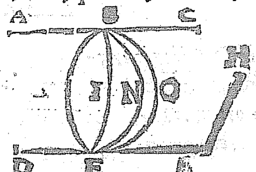
CO-

COROLLARIVM V.

Colligitur quintò, ſi ſupponamus, BIE, bifariam ſecare dictas ipſi, DF, parallelas in figura, BGEN, & deinde illis adiungi, BNEO, figuram in eiſdem parallelis cum, BGEN, conſtitutam; rectangulum ſolidum ſub, BGEO, & ſub, BNEO, hoc eſt vnum ſub, BGEI, ſeu, BIEN, & ſub, BNEO, indiuiſa, aliud ſub, BIEO, & ſub, BNEO, cum quadrato ſolido, BIEN, (quod iunctum rectangulo ſolido ſub, BIEN, BNEO, facit rectangulum ſolidum ſub, BIEN, BIEO, per Cor. 2.) æquari quadrato ſolido, BIEO, per Cor. 1. hoc eſt rectangulum ſolidum ſub figura compoſita ex propoſita, BGEN, & adiecta, BNEO, & ſub adiecta, BNEO, cum quadrato ſolido, BIEN, dimidiæ ipſius propoſitæ, æquari quadrato ſolido, BIEO, compoſitæ ex dimidia, BIEN, & adiecta, BNEO.

COROLLARIVM VI.

Colligitur ſextò, in eadem fig. BGEO, poſito, quod per lineam tantum, BNE, ſecentur dictæ parallelæ ipſi, DF, quad. ſolidum figuræ, BGEO, cum quadrato ſolido figuræ, BNEO, æquari rectangulo ſolido bis ſub, BGEO, & BNEO, figuris contento, cum quadrato ſolido reliquæ figuræ, BGEN. Nam quadratum ſolidum, BGEO, æquatur quadratis ſolidis, BGEN, BNEO, cum duobus rectangulis ſolidis ſub eiſdem figuris, addito ergo quadrato ſolido communi, BNEO, fient quadrata ſolida figurarum, BGEO, BNEO, æqualia duobus rectangulis ſolidis ſub figuris, BGEN, BNEO, cum duobus quadratis ſolidis, BNEO, hoc eſt duobus rectangulis ſolidis ſub, BGEO, BNEO, cum quadrato ſolido, BGEN.



COROLLARIVM VII.

Colligitur ſeptimò, ſi propoſitæ figuræ, BGEN, diuidatur per lineam, BIE, dictas quoq; parallelas ipſi, DF, ſecantem, rectangulum ſolidum quater ſub, BGEN, BIEN, cum quadrato ſolido, BGEI, æquari quadrato ſolido figuræ compoſitæ ex, BGEN, & figura, BIEN, ſeu illi homologa, quæ ſit, BNEO. Duo enim rectangula ſolida ſub, BGEN, BIEN, cum quadrato ſolido, BGEI, æquantur duobus quadratis ſolidis, BGEN, BIEN, ex Cor. ant.

hoc

hoc eſt quadratis ſolidis, BGEN, BNEO, additis communibus duobus adhuc rectangulis ſub, BGEN, BIEN, ſeu, BNEO, quæ ſuperſunt, fient quatuor rectangula ſolida ſub, BGEN, BIEN, cum quadrato ſolido, BGEI, æqualia duobus quadratis ſolidis, BGEN, BNEO, cum duobus rectangulis ſolidis ſub, BGEN, BNEO, hoc eſt quadrato ſolido, BGEO, per Cor. Tertium.

COROLLARIVM VIII.

Colligitur octauò, ſi figuræ, BGEO, ſecetur vt in Cor. 4. quadrata ſolida figurarum, BGEN, BNEO, dupla eſſe quadratorum ſolidorum, BGEI, BIEN. Nam quad. ſolidum, BGEN, æquatur quadratis ſolidis, BGEI, BIEN, cum duobus rectangulis ſolidis ſub, BGEI, BIEN, per Cor. Tertium, ideſt cum duobus rectangulis ſolidis ſub, BIEO, (homologa ipſi, BGEI,) &, BIEN, quibus ſi addatur reſiduum quadratum ſolidum, BNEO, fiunt duo rectangula ſolida ſub, BIEO, BIEN, cum quadrato ſolido, BNEO, æqualia quadrato ſolido, BIEO, ſeu, BGEI, cum quadrato ſolido, BIEN, igitur quadrata ſolida, BGEN, BNEO, dupla ſunt quadratorum ſolidorum; BGEI, BIEN.

COROLLARIVM IX.

Colligitur nonò, ſuppoſitis in figura ſectionibus ipſius Cor. 5. quadrata ſolida, BGEO, BNEO, dupla eſſe quadratorum ſolidorum, BGEI, BIEO. Etenim quadratum ſolidum, BGEO, æquatur per Cor 3. quadratis ſolidis, BGEI, BIEO, cum duobus rectangulis ſolidis ſub, BGEI, ſeu, BIEN, illi homologa, &, BIEO, quæ duo rectangula ſolida faciunt cum quadrato ſolido, BNEO, reſiduo, quadrata ſolida, BIEO, BIEN, ſeu, BGEI, BIEO, ergo quadrata ſolida, BGEO, BNEO, dupla ſunt quadratorum ſolidorum, BGEI, BIEO.

COROLLARIVM X.

Colligitur decimò, & vltimò, ſi tandem ex. g. lineæ, BNE, ſecet quaſcumq; intra figuram, BNE, ipſi, DF, æquidiſtantes, ſecundum extremam, ac mediam rationem, ita vt maior portio cuiuſcumq; ſectæ lineæ ſit ex. g. in figura, BGEN, rectangulum ſolidum ſub, BGEO, BNEO, æquari quadrato ſolido, BGEN, hæc enim ſolida erunt æqualiter analoga iuxta regulam planum, DFH, ex eo quod in vnoquoque eidem parallelorū planorum ipſa ſolida ſecantiū, ac capientiū vnū rectangulum, & vnum quadratum, ſemper rectangulum eſt æquale quadrato in eodem plano exiſtenti.

AN-

ANNOTATIO.

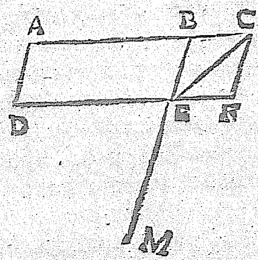
Duertatur autem me in omnibus supra positis Corollarijs supponere secantes lineas, parallelas ipsi, DF, in dictis figuris, non nisi semel occurrere eidem rectæ lineæ, vt, BIE, semel, ac, BNE, seorsim semel tantum; ipsas verò parallelas ad ambitum figuræ terminari, ac singulas integras esse, quod etiam suppono in prop. 25. lib. 2. integras autem esse subintelligo; cum in plures rectas lineas, aliquo interuallo separatas, per ambitum figuræ, quæ ab eadem regulæ parallela efficiuntur, disiungi minimè comperientur, in quo sensu sciat lector (ne quis circa hoc hæsitaret) me semper in his libris hunc terminũ vsurpare, sciat insuper eadẽ regulas, DF, FH, pro omnibus semper retineri. Hæc autẽ segnius, quam fortè par erat, à me nunc explicata sunt, sed cum Propositiones Lib. Sec. Elem. hæc imitarentur, & insuper consimilis doctrina, adhibita tamen indiuisibilium methodo, tradita iam fuisset Lib. 2. Prop. 23. ideò ne rerum similitudo fastidium pareret, currenti, vt ita dicam, calamo adnotata sunt. Ex supradictis autem facile est intelligere nomen quadrati solidi alicuius figuræ planæ æquipollere nomini omnium quadratorum eiusdem figuræ, & nomen rectanguli solidi sub duabus figuris æquipollere nomini rectangulorum sub eisdem figuris, quibus quidem in methodo indiuisibilium vtebamur, ex quo patet, vt sic nos indefinitum planorum numerum euitare, cui ipsorum, quæ rectangula solida appellauimus, soliditatem satis concinne puto substituimus. His autem paratis, sequentium propositionum demonstrationes tum quæ supersunt l. 2. tum lib. 3. 4. ac 5. paucis mutatis compendiosissimè per hanc nouam methodum, absq; solidarum figurarum circumscriptione, & inscriptione, vt alij consueuerunt, necnon facile, ostendemus, per hæc verò Prop. 23. Lib. 2. iam satisfactum esse manifestò apparet.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

Onspecta denuò figura Prop. 30. lib. 2. & assumpta regula, FD, & alia, quæ à puncto, F, quomodocunq; intelligatur eleuata super planum, AF, perpendiculariter ipsi, FD. Rectangulum solidum sub, AE, EC, ad rectangulum solidum sub, ADEC, trapezio, & triangulo, CEF, regulis iam dictis, contentum, erit vt, DE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. DE, & $\frac{1}{6}$. EF.

Hoc

Hoc ostendetur eodem modo, ac in supradicta prop. 30. lib. 3.
mutatis tantum supradictis nominibus, nempe si vbi dicimus re-
ctangula sub duabus quibusdam figuris, hic dicamus rectangulum
solidum sub eisdem figuris, sicuti etiam cum dicuntur omnia qua-
drata cuiusdam figuræ, nos illius vice
nunc substituemus nomen quadrati so-
lidi eiusdem figuræ, vt supra dicebatur.
Igitur cum rectangulum solidum sub
trapezio, ADEC, diuiso per lineam, B
E, & sub triangulo, CEF, indiuiso, æ-
quetur rectangulo solido sub, AE, &
triangulo, CEF, vel triangulo, BEC, &
rectangulo solido sub triangulo, BEC,
& triangulo, CEF, primò patet rectan-



31. huius.

gulum solidum sub, AE, EC, ad rectang. solidum sub, AE, & triã-
gulo, BEC, esse vt, BF, ad, BEC, idest vt, DE, ad $\frac{1}{2}$. DE, est enim,
BF, duplum trianguli, BEC. Similiter rectangulum solidum sub, Coroll. 1. 13. huius.
AE, EC, ad quadratum solidum, BF, est vt rectangulum, DEF, ad
quadratum, EF, idest vt, DE, ad, EF, quadratum verò solidum, B Coroll. 2. 13. huius.
F, cum sit triplum quadrati solidi, CEF, & quadrati solidi, BEC, Coroll. 2. 14. huius.
erit etiam triplum duorum rectangulorum solidorum sub, BEC, CE
F, (quadratum solidum enim, BF, ostensum est æquari quadratis
solidis, BEC, CEF, cum duobus rectang. solidis sub, BEC, CEF,) Coro. 15. huius.
& ideò erit sexcuplum rectanguli solidi, sub, BEC, CEF, idest erit
ad illud vt, EF, ad sui $\frac{1}{6}$. ergo ex æquali rectangulum solidum sub,
AE, EC, ad rectangulum solidum sub, BEC, CEF, erit vt, DE, ad
$\frac{1}{6}$. EF, & ad rectangulum solidum sub, AE, & triangulo, BEC, seu,
CEF, ostensum est esse vt, DE, ad $\frac{1}{2}$. DE, ergo colligendo rectan-
gulum solidum sub, AE, EC, ad rectangulum solidum sub, AE, CE
F, & sub, CBE, CEF, idest sub trapezio, CADE, & triangulo, CE
F, erit vt, DE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. DE, & $\frac{1}{6}$. EF, quod ostendere
opus erat.

ANNOTATIO.

Præsentem propositionem denuò secundum hanc nouam methodum ostendere volui, vt ad huius imitationem, reliquæ suppleri possint, in quibus, non alia, quam supradictorum nominum mutatione facta, demonstratio simillima sit, cum ea pariter fuerint stabilita principia, vt in antecedentibus potuit studiosus animaduertere, quæ principijs methodi indiuisibilium similia apparebant, sufficiet ergo tales propositiones, tantum innuere, cum illæ

illæ non aliam mutationem, quam prædictam in ſuis demonſtrationibus, popoſcere videbuntur. Quoad regulas autem, iuxta quas dicimus ſolida rectangula contineri, poterimus etiam vice duarum vnam tantum retinere, pro vt in methodo indiuiſibilium effectum eſt, vt ex. g. in fig. huius prop. poterat ſufficere ipſa, DF, altera enim regula non alio fungitur offitio, quam determinandi cum priori regula vnum planum, cui plana ſolida rectangula ſecātia, ac in illis rectangula plana producentia, æquidiſtant, & hoc in antecedentibus effectum eſt, vt clarior ſolidorum rectangulorum deſcriptio haberetur, in poſterum tamen vnam tantum regulam innuemus, alteram tacitè ſubintelligentes, dum præfata vni cuidā eſſe parallela ſemper ſupponere debeamus, erunt autem eædem regulæ, quæ in propoſitionibus infra citandis adhibitæ fuerunt, niſi alias regulas innuendi quandoq; neceſſitatem habuerimus.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

IN eodem Prop. 30. Lib. 2. ſchemate, regula eadem ibi aſſumpta, rectangulum ſolidum ſub, AF, FB, ad rectangulum ſolidum ſub trapezio, ADEC, & triangulo, BEC, erit vt, DF, ad compoſitam ex, $\frac{1}{2}$. DE, & $\frac{1}{3}$. EF.

Hæc oſtendetur vt ibi, prædicta tantum nominum mutatione facta, vt meditanti innoteſcet.

THEOREMA XVIII PROPOS. XVIII.

IN ſchemate Prop. 31. eiuſdem Lib. 2. regula eadem, rectangulum ſolidum ſub, AO, OB, ad rectangulum ſolidum ſub trapezijs, HACN, MBCN, eſt vt rectangulum, HOM, ad rectangulum ſub, HO, MN, cum rectangulo ſub compoſito ex $\frac{1}{2}$. HM, & $\frac{1}{2}$. NO, & ſub, NO.

Hæc ſimiliter vt antecedens expedietur.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

IN ſchemate Prop. 32. Lib. 2. ſimiliter regula eadem retenta, rectangulum ſolidum ſub, AE, ER, ad rectangulum ſolidum ſub trapezijs, ADEC, CESR, erit vt rectangulum, DES, ad rectangulum ſub, DE, & compoſita ex, SF, & $\frac{1}{2}$. FE, vna cum rectangulo ſub, EF, & compoſita ex $\frac{1}{6}$. EF, & $\frac{1}{2}$. FS.

Hæc etiam vt antecedentes abſoluetur.

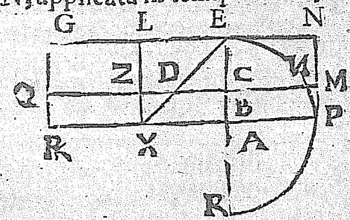
ANNOTATIO.

HVcuſq; Propoſitionibus Lib. 2. quæ reſtauratione indigere videbantur ſatisfactum eſſe manifeſto apparet. Reliquum eſt, vt & ſequentium Librarum Propoſitiones denuò perpendentes, per hanc nouam methodum à nobis quoq; & ipſæ reſtaurentur, quod maiori, qua fieri poterit, breuitate, ac facilitate, nunc præſtare conabimur.

THEOREMA XX. PROPOS. XX.

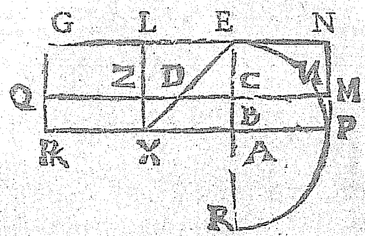
ASſumpto ex Schemate Prop. 1. Lib. 3. ſemicircolo, vel ſemiellipſi, EPR, circa diametrum, ER, ſimul cū applicata, BP, quæ etiam ſit regula, & parallelogrammo, HB, iuxta quemlibet trium ibi allatorum caſuum nunc oſtendemus, conſpecta etiam illa figura, quadratum ſolidum portionis, DEP, ad quadratum ſolidum parallelogrammi, FP, eſſe vt compoſita ex $\frac{1}{6}$. EB, & $\frac{1}{2}$. BR, ad ipſam, BR.

Producantur enim indefinitè verſus, B, E, ipſę, PB, HE, & ſiant, BR, EG, ſingulæ æquales ipſi, RE, & iungantur, GR, capiaturq; BX, æqualis ipſi, BE, & per, X, agatur, XL, parallela, ER, & iungatur, XE, ac ſit quæcumque, CN, applicata in ſemiportione, EPB, quæ producatur indefinitè hinc inde vt ſecet, HP, vt in, M, EX, vt in, D, LX, vt in, Z, & GR, vt in, Q; ſunt ergo, GB, LB, GX, parallelogramma, & RX, eſt æqualis, RB, XB, autem ipſi, BE, vnde rectangulum, RXB, eſt æquale rectangulo, RBE, hoc eſt, in circulo quadrato, BP: eadem ratione oſtendemus tum rectangulum, QZC, æquari quadrato, CM, tum rectangulnm, QDC, æquari quadrato, CN, & hoc



 idem

idem probabimus circa alias quaſcumque applicatas. In ellipſi
verò oſtendemus rectangula, ℞XB, QDC, eſſe vt quadrata, BP, C
N, ſicut rectangula, ℞XB, QZC, vt quadrata, BP, CM. Ergo ſi
intelligamus ſolidum rectangulum fieri ſub parallelogrammis, GX,
XE, & quadratum ſolidum, EP,
communi regula, BP, erunt hæc
ſolida inter ſe æqualiter, vel pro-
portionaliter, analoga, cum ſint
in eiſdem planis parallelis, nem-
pè tranſeuntibus per lineas, ℞P,
GH, & quæcunq; plana his pa-
rallela præfata ſolida ſecantia,
producant in ipſis æquales figu-



ras planas, vel ſaltem proportionales, ſicut patuit de rectangulo, Q
ZC, æquali quadrato, CM; vel ad idem exiſtente, vt rectangulum,
℞XB, ad quadratum, BP. Eadem ratione, quia probauimus re-
ctangulum, QDC, æquari quadrato, CN, vel ad idem eſſe vt re-
ctangulum, ℞XB, ad quadratum, BP, concludemus ſolidum rectã-
gulũ ſub trapezio, EG℞X, & triangulo, EXB, eſſe ęqualiter, vel pro-
portionaliter, analogum quadr. ſolido, EBP, iuxta communem re-
gulam, BP, igitur rectangulum ſolidum, ſub GX, XF, æquabitur qua-
drato ſolido, EP, & rectangulum ſolidum ſub, EG℞X, EXB, ęqua-
bitur quadrato ſolido, EBP, vel ſaltem erunt proportionalia in el-
1. huius. lipſi, ergo quadratum ſolidum, EP, ad quadr. ſolidum, EBP, erit
3. huius. vt rectangulum ſolidum ſub, GX, XE, ad rectangulum ſolidum
ſub, EG℞X, &, EXB, hoc eſt, vt, ℞X, ad compoſitam ex $\frac{1}{2}$. ℞X,
& $\frac{1}{6}$. XB, ideſt, vt, RB, ad compoſitam ex $\frac{1}{2}$. RB, & $\frac{1}{6}$. BE, ergo,
16. huius. iterum conſpecta figura prop. 1. lib. 3. quadratum ſolidum portio-
nis, DEP, ad quadratum ſolidum, EP, erit vt compoſita ex $\frac{1}{6}$. BE,
& $\frac{1}{2}$. BR, ad ipſam, BR, cum enim ſemiportiones, DEB, BEP,
ſint homologę ſecundum regulam planum tranſiens per regulam,
BP, cui æquidiſtant plana ſolida ſecantia, ſicut etiam, FB, BH, &
Cor. 3. 15. huius. cum quadratum ſolidum figuræ, FP, diuiſæ per lineam, EB, æque-
tur quadratis ſolidis, FB, BH, & duobus rectangulis ſolidis ſub, FB,
BH, ideſt quatuor quadratis ſolidis, BH, ideò quadratum ſolidum,
FP, quadruplum erit quadrati ſolidi, BH, ſicut etiam patebit qua-
dratum ſolidum portionis, DEP, quadruplum eſſe quadrati ſolidi
ſemiportionis, EBP, ergo, vt quadratum ſolidum, EBP, ad qua-
dratum ſolidum, BH, ita eſt quadratum ſolidum portionis, DEP, ad
quadratum ſolidum, DH, ideſt vt compoſita ex $\frac{1}{6}$. BE, & $\frac{1}{2}$. BR, ad
ipſam, BR, quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

*Ex proximè dictis manifeſtum eſſe poteſt quadratum ſolidum cuiuſ-
cumq; figuræ circa diametrum, regula baſi, quadruplum eſſe
quadrati ſolidi cuiuſuis eiuſdem portionum, quæ ab ipſa diametro ſe-
parantur.*

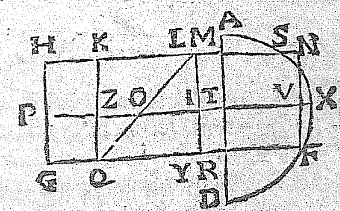
ANNOTATIO.

POſterior pars prop. 8. lib. 5. oſtendetur vt ibi dicta nominum
tantum mutatione facta cum Cor. ſicut etiam prop. 2.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

ASſumpto ex ſchemate prop. 3. ſemicirculo, vel ſemiel-
lipſi, ASFD, circa diametrum, AD, ſimul cum appli-
catis, RF, MS, quarum altera ſit regula, & parallelogram-
mo, NR, oſtendemus in illius figura, quadratum ſolidum
FB, ad quadratum ſolidum portionis, ICFS, eſſe vt rectan-
gulum, DRA, ad rectangulom ſub, DR, & ſub compoſita
ex $\frac{1}{2}$. RM, & ex, MA, vna cum rectangulo ſub, RM, & ſub
compoſita ex $\frac{1}{6}$. RM, & $\frac{1}{2}$. MA.

Producantur enim indefinitè ipſæ applicatæ, SM, FR, verſus,
MR, à quibus abſcindantur, CR, HM, ſingillatim ipſi, DA, æqua-
les, vt etiam, GQ, HK, ſin-
gillatim pariter æquales ipſi,
DR, &, YR, LM, æquales
ipſi, MA, & iungantur, HG,
kQ, LY, QL, & ſit, TX, quę
cumq; inter, RF, MS, diame-
tro, AD, ſimiliter applicata,
quæ indefinitè hincinde ex-
tendatur ſecans, NF, in, V, A



D, in, T, LY, in, I, LQ, in, O, KQ, in, Z, &, HG, in, P. Erunt
ergo, HQ, KY, LR, parallelogramma, & rectangulum, GQR, æ-
quabitur rectangulo, DRA, cum autem, GQ, ſit æqualis, DR, &,
YR, ipſi, MA, erit, QY, æqualis, RM, hoc eſt ipſi, YL, eſt autem,
QY, ad, YL, vt, OI, ad, L, ergo, OI, æquatur, IL, ideſt, TM, &, Z
I, ipſi, RM, ergo, ZO, æquatur, RT, ergo rectangulum, POT, æ-
qua-

quatur quoq; rectangulo, DTA, ergo vt rectangulum, GQR, ad
rectangulum, POT, ita rectangulum, DRA, erit ad rectangulum,
DTA, hoc est ita quadratum, RF, ad quadratum, TX, ergo per-
mutando rectangulum, GQR, ad quadratum, RF, erit vt rectan-
3. huius. gulum, POT, ad quadratum, TX, quod & in reliquis huiusmodi
ostendetur spatijs ergo rectangulum solidum sub trapezijs, LHG
Coroll. 2. 13. huius. Q, LMRQ, & quadratum solidum, MSXFR, erunt, vel æqualiter
in circulo, vel proportionaliter analoga in ellipsi, ergo erunt inter
se vt rectangulum, GQR, & quadratum, RF, sunt quoq; inter se,
sed vt rectangulum, GQR, ad quadratum, RF, sic etiam esse ostē-
demus rectangulum solidum sub, HQ, QM, ad quadratum solidū,
NR, ergo rectangulum solidum sub, HQ, QM, ad quadratum so-
lidum, NR, erit vt rectang. solidum sub, LHGQ, LMRQ, ad qua-
dratum solidum, MSXFR, & permutando rectangulum solidum
sub, HQ, QM, ad rectangulum solidum sub, LHGQ, LMRQ, erit
vt quadratum solidum, NR, ad quadratum solidum, MSXFR, est
autem rectangulum solidum sub, HQ, QM, ad rectangulum soli-
dum sub, HGQL, LQRM, vt rectangulum sub, GQR, ad rectan-
19. huius. gulum sub, GQ; & sub composita ex $\frac{1}{2}$. QY, & ex, YR; vna cum
rectangulo sub, QY, & sub composita ex $\frac{1}{6}$. QY, & $\frac{1}{2}$. YR, hoc est
vt rectangulum, DRA, ad rectangulum sub, DR, & sub composi-
ta ex $\frac{1}{2}$. RM, & ex, MA, vna cum rectangulo sub, RM, & sub cō-
posita ex $\frac{1}{6}$. RM, & $\frac{1}{2}$. MA, ergo sic etiam erit quadratum solidum
NR, ad quadratum solidum semiportionis, MSXFR, & ita etiam
quadratum solidum, BF, ad quadratum solidum ipsius, ICFS, con-
specta figura dictæ prop. 3. quod ostendere opus erat.

ANNOTATIO.

POsterior pars dictæ Prop. 3. ostendetur vt ibi, solita nominum
mutatione facta, sicut etiam Prop. 4. Prop. 5. restauratione
non indiget; Cor. autem deducetur eodem modo, vt ibi mutatis
tantum dictis nominibus, fiunt enim quadrata solida figurarum
5. huius. ijsdem parallelis in eiusdem schemate interceptarum, figuræ solidę
æqualiter analogæ, vnde etiam sunt æquales, ex quo concluditur
deinde Corollarium eodem modo, quo ibi factum est. Prop. 6.
cum Cor. Prop. 7. 8. 9. cum Cor. pariter vt ibi ostendentur, muta-
tis nominibus, vt supra Prop. 10. sic patebit probabuntur enim fi-
guræ, AFH, AGH, esse proportionaliter analogæ, & ideò esse inter
se, vt, FH, HG, eodem modo, quo ibi factum est, ex quo similiterr
concludetur, AFVT, ad, AGVS, esse vt, FT, ad, GS; & non dis-
simi-

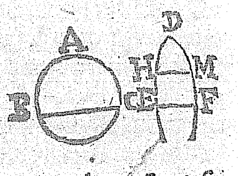
similiter in Cor. colligemus quadratum solidum, AFVT, ad quad
solidum, AGVS, esse vt quadratum, FT, ad quadratum, GS, subau-
di tamen in illius schemate secundas diametros, FT, GS, esse in eadē
recta linea. Prop. 11. cum Cor. demonstrantur, vt ibi, Prop. verò
12. similiter, solita tantum nominum mutatione facta. Prop. 13.
ostendetur quoque mutatis nominibus, &c. in qua aduerte pag. 37.
lin. 22. superfluè dici in, EF, quadratum, EI, detractum à rectan-
gulo sub, IE, EF, relinquere rectangulum sub, EI, IF, vt conclud a-
tur detractis omnibus quadratis semiportionis, OCD, à rectangu-
lis sub parallelogrammo, OV, & semiportione, OCD, relinqui re-
ctangula sub, OCD, DCV, hoc enim constat ex C. 23. l. 2. vt ci-
tatur in margine, illud tamen ad maiorem declarationem apposi-
tum erat. Corollarium eiusdem pariter declarabitur mutatis, &c.
Prop. 14. similiter probabitur, cum Cor. mutatis nominibus, &c.
Sic etiam Prop. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. cum Cor. in qua patebit
rectangula sub, ASB, AHTFB, æquari rectangulis sub triangulis,
ABD, AVD, cum sint solida æqualiter analoga, & hoc in figura
circuli, in figura autem ellipsis dicta solida ostendentur esse propor-
tionaliter analoga, ac inter se vt coniugatarum diametrorum qua-
drata. Sic etiam Prop. 22. 23. 24. 25. 26. in qua schema ante-
cedentis reponendum est. Propos. 27. 28. 29. 30. 31. cum Cor.
Prop. 32. cum Cor. ac tandem Prop. 33. pariter cum Cor.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

EXpositis duabus quibuscumq; figuris planis, & in ea-
rum vnaquaq; sumpta vtcumq; regula, vt quadrata
solida earundem figurarum iuxta dictas regulas, ita erunt
solida quæcumq; ad inuicem similaria ex eisdem genita fi-
guris, iuxta easdem regulas.

Sint duæ quæcumq; figuræ planæ, ABC, DEF, in quibus duæ
vtcumq; sint sumptæ, BC, EF, rectæ lineæ. Dico igitur vt qua-
dratum solidum figuræ, ABC, ad quadratum solidum figuræ, DE
F, regulis iam dictis ita esse quodcunq; solidum similare genitum
ex, ABC, ad sibi similare genitum ex, DEF, iuxta easdem regulas.
Ducatur in altera figurarum, vt in, DEF, vtcumq; regulæ, EF, pa- 15. l. 2.
rallela, HM. Igitur quadratum, EF, ad quadratum, HM, habet
duplicatam rationem eius, quam habet, EF, ad, HM, sed etiam 15. l. 2.
alia quælibet figura plana descripta ab, EF, ad sibi similem descri-
ptam

ptam ab, HM, prædictæ homologa, habet duplicatam rationem eius, quam, EF, habet ad, HM, ergo vt quadratum, EF, ad quadratum, HM, ita eſt figura, EF, ad ſibi ſimilem figuram deſcriptã ab, HM, & permutando vt quadratum, EF, ad figuram quamcũq; aliam deſcriptam ab, EF, ita erit quadratum, HM, ad figuram prędictæ ſimilem deſcriptam ab, HM, prædictæ homologa, ergo quadratũ ſolidum figuræ, DEF, & ſolidum ſimilare quodcumq; genitum ex figura, DEF, iuxta cõmunem regulam, EF, ſunt ſolida proportionaliter



3. huius. analoga ſecundum communem regulã, EF, ergo erunt inter ſe vt figuræ planæ ab eodem latere, vt ab, EF, deſcriptę. Eodẽ modo oſtẽdemus quadratum ſolidũ, ABC, & ſolidũ aliud quodcumq; ſimilare genitum ex figura, ABC, iuxta cõmunẽ regulam, BC, eſſe inter ſe, vt figuræ a, BC, deſcriptæ, ſunt autem duo quadrata, BC, EF, & duæ aliæ quæcumq; ſimiles figuræ planæ deſcriptæ ab homologis, BC, EF, proportionales, ergo & dicta ſolida proportionalia erunt, nẽpè vt quadratũ, BC, ad figuram, BC, ſic erat quadratum ſolidũ, ABC, ad ſolidum ſimilare genitũ ex, ABC, ſed vt quadratũ, BC, ad figurã, BC, ita eſt quadratum, EF, ad figuram, EF, prædictæ ſimilem, & ita etiam quadratum ſolidum, DEF, ad ſolidum prædicto ſimilare genitum ex, DEF, ergo quadratum ſolidum, ABC, ad ſolidum ſimilare, ABC, eſt vt quadratum ſolidum, DEF, ad ſolidum prædicto ſimilare genitũ ex, DEF, & permutando quad. ſolidũ, ABC, ad quadratũ ſolidũ, DEF, erit vt ſolidũ quodcũq; ſimilare genitũ ex, ABC, ad ſibi ſimilare genitũ ex, DEF, iuxta dictas regulas, quod oſtendere opus erat.

ANNOTATIO.

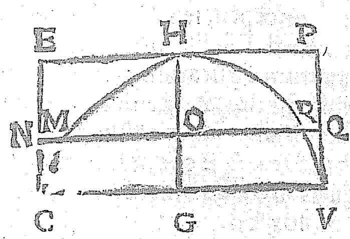
HVius demonſtratio ſimilis eſt demonſtrationi Prop. 33. l. 2. cui per hanc ſuppletur, Corollaria autem iuxta methodum ibi adhibitam facilè quoq; deducentur, illam vero huc reſeruaui, vt promptiorem pro colligendis ſequentibus Corollarijs lib. 3. ex hac pendentibus eam haberemus. Adhibuit quidem nomen ſolidi ſimilaris, quod per indefinitum numerum parallelorum planorum fuit pariter explicatum lib. 2. ad B. Defin. 8. attamen ſi vice omnium planorum, ſeu deſcriptarum figurarum, ſubſtituamus quotcumq; plana, ſeu deſcriptas figuras, ita vt perimetri deſcriptarum figurarum iacere intelligantur in ſuperficie ipſum ſolidum ambiẽte, intelligemus nihilominus, licet nonnihil diuerſo modo, eſſe idẽ ſolidum, quod dicitur ſimilare, ac à propria genitrice deſcriptum,

iuxta datam regulam, ſiue ſecundam illam definitionem abſolutè, ſiue per eandem ſic modificatam, vt hæc ſimilaria ſolida ab infinitatis conceptu, ſeu ab indiuiſibilium methodo, eximerentur; Non eſt autem difficile inſuper intelligere quadrata ſolida quarumcũq; planarum figurarum, in ambitu eorundem exiſtentium, eſſe etiam ſolida ſimilaria, genita ex eiſdem figuris, quarum dicuntur quadrata ſolida, iuxta eaſdem regulas, iuxta quas quadrata ſolida dicebantur: & è conuerſo ſolida ſimilaria, genita ex quibuſcumq; figuris iuxta quaſuis regulas, quarum figuræ, à genitricium lineis homologis deſcriptæ tamquam à lateribus, ſint quadrata, eſſe pariter quadrata ſolida earundem figurarum iuxta eaſdem regulas. Igitur ad rem noſtram manifeſtum eſt, quod quæcumq; ſolida ad inuicem ſimilaria, genita ex figuris lib. 3. hic denuò conſideratis, iuxta aſſumptas regulas (quarum patefacta eſt ratio quadratorum ſolidorum) habebunt rationem notam, per quod ſuppletur Propoſit. 34. lib. 3. colligentur autem vt ibi factum eſt ſequentia Corollaria vſq; ad finem eiuſdem lib. 3. mutatis tantum ſæpè dictis nominibus, vbi neceſſe fuerit, quod enim ibi per omnia quadrata hic per quadrata ſolida conſideratarum figurarum colligetur. Doctrina autem ſcholij ſubſequentis etiam pro hac noua methodo ſubſiſtit, ſi tamen vice omnium figurarum, ſeu omnium planorum, ſubſtitutas intelligamus quotcumque figuras, ſeu quotcumque plana, cætera enim à methodo indiuiſibilium exempta ſunt, & hæc ſufficiant circa examen lib. 3. nunc autem Prop. lib. 4. ſimiliter perluſtrabimus.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

ASſumpta ex ſchemate Prop. 1. Lib. 4. ſemiparabola, CHG, cum parallelogrammo, EG, viſa tamen etiam illa figura, oſtendemus parallelogrammum, EF, ſexquialterum eſſe parabolæ, HCF.

Producta enim diametro, CG, vtcumq; in, V, deſcribatur quadrans circuli, vel ellipſis, HGV, iuxta duas ſemidiametros coniugatas, HG, GV, & per, H, ducta, EP, parallela, CV, & indefinitè extenſa, agantur ſimiliter à punctis, CV, parallelę, HG, ipſæ, EC, PV, erunt ergo parallelogramma, EG, GP, EG, quidem circumſcriptum ſemiparabolæ, HCG, &, PG, quadrati, HGV, ſit inſuper quæcumq; MO, ordinatim ad, HG, applicata, regula, CG, quę pro alis in hac propositione sit pariter regula, extendaturq; hinc indevt secet EC, vt in, N, HV, vt in, R, & PV, vt in, Q, ergo, CG, ad, MO, erit vt quadratum, GH, ad rectangulum sub composita ex, HG, GO, & sub, OH, (hoc.n. deducitur ex prop. 3. lib. 4. quæ non dependet à prop. 1. neq; indiget, quod denuò demonstretur) idest vt quadratum, GV, ad quadratum, OR, sed vt, CG, ad MO, ita est quadratum, CG, ad rectangulum sub, CG, seu, NO, & OM, ergo quadratum, CG, ad rectangulum, NOM, erit vt quadratum, GV, ad quadratum, OR, & permutando quadratum, CG, ad quadratum, GV, erit vt rectangulum, NOM, ad quadratum, OR, sic ductis alijs parallelis euenire ostendemus; ergo solidum rectangulum sub, EG, parallelogrammo, & semiparabola, CHG, erit proportionaliter analogum quadrato solido quadrantis, HVG, secundum regulam, CV, secundum eandem autem ostendemus etiam quadratum solidum, EG, esse proportionaliter analogum quadrato solido, HV, etenim quadratum, CG, ad quadratum, GV, est vt quadratum, NO, ad quadratum, OQ, vnde vt quadratum, CG, ad quadratum, GV, sic erit quadratum solidum, EG, ad quadratum solidum, GP, & sic etiam rectangulum solidum sub, EG, HCG, ad quadratum solidum, HGV, ergo quadratum solidum, EG, ad quadratum solidum, HV, erit vt rectangulum solidum sub, EG, HCG, ad quadratum solidum, HGV, ergo permutando quadratum solidum, EG, ad rectangulum solidum sub, EG, HCG, erit vt quadratum solidum, HV, ad quadratum solidum, HGV, sed quadratum solidum, HV, sesquialterum est quadrati solidi, HGV, cum, VG, transeat per centrum, G, ergo quadratum solidum, EG, sesquialterum erit rectanguli solidi sub, EG, HCG; sed vt quadratum solidum, EG, ad rectangulum solidum sub, EG, HCG, ita basis, EG, ad basim, HCG, ergo, EG, erit sesquialtera, HCG, & consequenter, visa figura prop. 1. lib. 4. erit parallelogrammum, AH, sesquialterum parabolæ, FCH, quod ostendendum erat.



Elicitur ex 20. huius.

Cor. 1. 13. huius.

ANNOTATIO.

PEr hanc autem suppletur prop. 1. lib. 4. etenim illius posterior pars deducetur, vt ibi, hac verò demonstrata reliqua nunc percurremus.

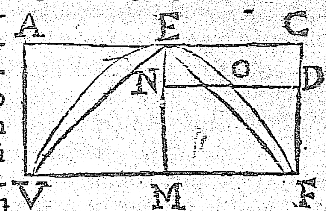
Igitur circa Corollarium p. 1. nihil dicendum est. Prop. 2. autem restauratione non indiget. Prop. 3. similiter. Prop. 4. ostendetur eo modo, quo nos primam demonstrauimus, Corollariũ verò deducetur vt ibi, mutatis tamẽ sepè dictis nominibus &c. ex hac autem ostensa facilè deducetur prop. 5. cum Cor. mutatis &c. vt etiam prop. 6. cum Cor. p. 7. 8. cum dictis in Scholio. Similiter Prop. 9. 10. cum Cor. mutatis &c. Prop. 11. cum Cor. p. 12. 13. 14. 15. 16. 17. cum Cor. 18. 19. cum Cor. 20. cum Cor. restaurationem minimè postulant, cum à methodo indiuisibilium non dependeant.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

EXposito denuò Schemate prop. 21. eiusdem lib. 4. regula eadem, VF, retenta, ostendemus quadratum solidũ, AF, duplum esse quadrati solidi parabolæ, VEF, & hoc esse sesquialterum quadrati solidi trianguli, VEF.

Estò quòd, ND, secet, EF, in, I, igitur rectangulum, DNI, est æquale quadrato, NO, quod & circa quascumq; applicatas contingere concludemus, ergo rectangulum solidum sub parallelogrammo, CM, & triangulo, EMF, erit æqualiter analogum quadrato solido semiparabolæ, EMF, quadratum solidum autem, CM, ad rectangulũ solidum sub eodem parallelogrammo, CM, & sub triangulo, EMF, est vt, CM, ad EMF, idest duplum, ergo quadratum solidum, CM, duplum erit quadrati solidi, EMF, & consequenter quadratum solidum, AF, duplum etiam erit quadrati solidi parabolæ, VEF, vnde & quadratum solidum, VEF, sesquialterum erit quadrati solidi, EVF, quod &c.

18 l. 4.



Cor. 1. 13. huius.

ANNOTATIO.

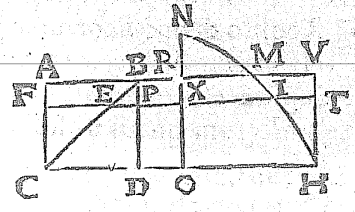
PEr suprapositam prop. suppletur prop. 21. prop. 22. verò deducetur eodem modo mutatis nominibus &c.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

ASsumpta ex Schemate prop. 23. semiparabola, NOH, cum frusto, MROH, & parallelogrammo, VO, ac recta,

cta, TX, secante curuam, MH, in, I, regula, OH, ostendemus quadratum solidum, PH, visa dicta figura, ad quadratum solidum, ABHM, esse vt, ON, ad compositam ex, NR, & ½. RO.

Extendantur .n. HO, VR, versus, OR, & fiant, OC, RA, singulæ æquales ipsi, ON, &, DO, BR, capiantur singulæ æquales ipsi, RN & iungantur, AC, BD, CB, quas extensa indefinitè, TX, secet in, F, P, E. Erunt ergo, AO, BO, AD, parallelogramma. Cum verò, CO æquetur, ON, & DO, ipsi, RN, erit, CD, æqualis, OR .i. ipsi, DB, vnde etiam, EP, ipsi, PB, hoc est ipsi, RX, & tota, EX, toti, NX, & reliqua, FE, reliquæ, OX, æqualis erit. Quoniam verò quadratum, OH, ad quadratum, XI, est vt, ON, ad, NX, hoc est, FX, ad, XE, hoc est quadratum, FX, vel quadratum, CO, ad rectangulum, FXE, ideò permutando quadratum, HO, ad quadratum, OC, erit vt quadratum, IX, ad rectangulum, FXE, ex quo concludemus, vt in superioribus rectangulum solidum sub, AO, & trapezio, BCOR, esse proportionaliter analogum quadrato solido, RMHO. Similiter ostendemus quadrata solida, AO, QV, esse proportionaliter analoga, & consequenter prædictis duobus solidis esse proportionalia colligemus, vnde permutando quadratum solidum, VO, ad quadratum solidum, MORH, seu (conspecta figura prop. 33. lib. 4.) quadratum solidum, PH, ad quadratum solidum frusti, ABHM, erit vt quadratum solidum, AO, ad rectangulum solidum sub, AO, & trapezio, BCOR .i. vt, AO, ad, BCOR .i. vt, CO, ad compositam ex, OD, & ½. DC, .i. vt, ON, ad compositam ex, NR, & ½. R C, quod &c.



Cor. 1. 13. huius. 20. l. 2.

ANNOTATIO.

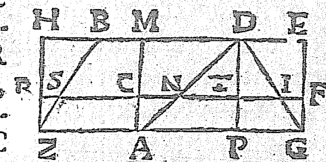
Per hanc similiter suppletur prop. 23. posterior .n. pars, cum Cor. deducetur vt ibi, mutatis nominibus &c. Prop. 24. restauratione non indiget, sicut etiam p. 25. cum Cor. Prop. 26. ostendetur etiam vt ibi, mutatis, &c. sicut & p. 27. cum Cor. similiter p. 28. cum Cor. p. 29. cum Corollarijs, p. 30. cum Corollarijs, p. 31. 32. cum Cor. p. 33. 34. cum Cor. 35. cum Cor. p. 36. 37. 38. 39. 40. cum Cor. 41. 42. 43. 44. 45. p. 46. autem est nobis restauranda.

THEO-

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

In figura prop. 46. ostendemus, regula eadem retenta, rectangulum solidum sub, HP, PE, duplum esse rectanguli solidi sub, BZPD, DPG.

Sumatur .n. de illius schemate parallelogrammum, HG, cum frusto parabolæ, BZGD, & rectis, RF, DP, fiat autem insuper, AP, æqualis, PD, & ducta, AM, parallela, DP, iungatur, AD, secans, CT, in, N. Cum ergo in dicta prop. independenter ab indiuisibilium methodo, eõcludatur rectangulũ RTF, ad, STI, esse vt, PD, ad, DT, idpsum & hic tanquã demonstratũ recipiemus, sed, PD, ad, DT, hoc est, CT, ad, TN, est vt quadratum, CT, ad rectangulum, CTN, ergo rectangulum, RTF, ad, STI, erit vt quadratum, CT, ad rectangulum, CTN, est autem, RF, vtcumq; ducta parallela, ZG, ergo modo consueto ostendemus solidum rectangulum sub, HP, PE, esse proportionaliter analogum quadrato solido, MP, sicut rectangulum solidum sub, BZPD, DPG, esse proportionalites analogum rectangulo solido sub, MP, PAD, & tandem concludemus hæc solida esse proportionalia, idest rectangulum solidum sub, HP, PE, ad rectang. solidum sub, BZPD, DPG, esse vt quadratum solidum MP, ad rectangulum solidum sub, MP, PDA, idest vt, MP, ad, PDA, idest concludemus rectangulum solidum sub, HP, PE, duplum esse rectanguli solidi sub, BZPD, PDG, quod ostendendum erat. Cor. 1. 13. huius



ANNOTATIO.

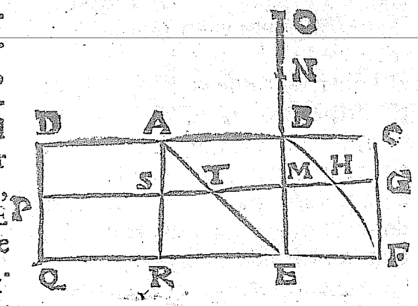
Prop. 46. igitur restaurata, stylo nostro sequentium propositionum demonstrationes prosequemur ab hac vsque ad 51. inclusiuè, quæ quidem veritatem habere comperitur ex prop. 22. huius. Scholium autem sequens retineatur vt ibi, substituendo tamen nomini omnium similium figurarum hoc aliud, nempe quotcunque similes figuras &c. vt in examine lib. 3. animaduersum est. His verò prædemonstratis subsequentia Corollaria vsq; ad finem lib. 4. solita nominum mutatione facta, cuncta facillimè deducentur per iam ostensa circa quadrata, seu rectangula solida sub talibus, & talibus

libus

libus figuris, in antecedentibus prop. consideratis. Appendix autem Cor.6 restauratione minimè indigere manifestum est. Et hæc circa prop.lib.4.adnotasse sufficiat, reliquum est, vt ad lib.5.examinandum nos conferamus.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

IN Schemate prop.1.lib.5.regula eadem retenta, ostendemus quadratum solidum parallelogrammi, AF, ad quadratum solidum hyperbolæ, DBF, esse vt, OE, ad compositam ex, NB, & $\frac{1}{3}$. BE.



Assumatur .n. ex eo parallelogrammum, CE, cum semihyperbola, BEF, & recta, OE, necnon, MG, quæcumq; ex ordinatim applicatis ad diametrum, BE, extendantur autem, CB, FE, & fiant BD, EQ, singulæ æquales ipsi, EO, necnon, RE, AB, singulæ æquales ipsi, EB, & iungantur, DQ, AR, AE, quas, GM, indefinitè quoq; producta secet in punctis, P, S, T. Erunt ergo, DR, DE, AE, parallelogramma. Quoniam verò quad. EF, ad quad. MH, est vt rectang. OEB, ad, OMB, hoc est vt rectangulum, QER, ad rectangulum, PTS, permutandò quadratum, FE, ad rectangulum, QER, erit vt quadratum, HM, ad rectangulum, PTS, quod & in cæteris ostendemus, ergo quadratum solidum, BEF, & rectangulum solidum sub trapezio, DQEA, & triangulo, AER, erunt proportionaliter analoga, ac in proportione quadrati, FE, & rectanguli, QER. Consimili modo probabimus quadratum solidum, CE, esse æqualiter analogum rectangulo solido sub, QB, BR, & ad ipsum pariter esse in proportione quadrati, EF, ad rectangulum, QER, ergo dicta solida proportionalia erunt, & permutãdo quadratũ solidum CE, ad quad. solidũ, BEF, erit vt rectangulum solidum sub, QB, BR, ad rectangulum solidum sub, DQEA, ARE, hoc est vt, QE, ad cõpositam ex $\frac{1}{2}$. QR, & $\frac{1}{3}$. RE, hoc est vt, OE, ad compositã ex, NB, (quæ est dimidia, BO,) & $\frac{1}{3}$. BE, igitur, viso schemate dictę prop. 1. quadratum solidum, AF, ad quadratum solidum, DBF, erit vt, OE, ad compositam ex, NB, & $\frac{1}{3}$.BE, quod demonstrare oportebat.

39.& sch. 40.l.1.

17.huius.

AN-

ANNOTATIO.

PEr hanc suppletur prior parti prop.1.posterior verò ostendetur vt ibi, mutatis consuetis nominibus &c. sicut etiam prop. 2. Consimili autem methodo adhibita in præsenti prop. ostendemus quad.solidum, GE, ad quadratum solidum, HMEF, in superiori fig. (hoc est in figura p.3.lib.5.quadratum solidum, SF, ad quadratum solidum, HDFG,) esse vt rectangulum solidum sub, QM, MR, ad rectangulum solidum sub trapezijs, PQET, SRET, hoc est vt rectangulum, QER, ad rectangulum sub, QE, ST, vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$.PS, & $\frac{1}{3}$.TM, & sub, TM, idest viso schemate p.3.vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, & NM, vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. NO, & $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME; posterior pars autem eiusdem prop.3.deducetur vt ibidem, mutatis nominibus &c. Sicut & omnes prop. à 4. vsque ad 20. inclusiuè, cum earum Corollarijs. In prop.21.verò patebit quadratum solidum, OP, visa illius figura æquari rectangulo solido sub, OLS, OVCS, figuris, regula, DC, etenim ex ibi demonstratis liquidò apparet hæc esse solida æqualiter analoga iuxta dictam regulam, ex quo de inde reliquá concludentur mutatis nominibus &c. sicuti & Cor. In prop:22.figura sic est corrigenda, debet enim, EC, hinc inde produci, vt incidat asymptotis, OY, OP, versús eam productis, in, S, I, quæ litterę desunt, cæterum prop.ostendetur vt ibidem mutatis &c. simul cum Corollarijs, necnon prop.23.24.25.26.27.28. cum Cor.& 29.cum Cor. Prop.30.autem patet ex dictis. His deniq; restauratis, ac sequenti scholio modificato, iuxta quod dictum fuit in examine lib.3.& 4.sequentia Corollaria vsq; ad finem eiusdem l.5.per quadratorum solidorum prædemonstrata, similiter, vt in præfatis libris, colligentur, hæc autem pro restauratione lib.5. dicta sint satis.

18. huius.

22.huius.

Annot.22. & 26. huius.

Quoad lib.6.verò patet in eo traditas demonstrationes, quæ ex methodo indiuisibilium dependebant, ibidẽ fuisse restauratas. Illæ autem propositiones, in quibus adhibentur aliquando nomina omnium quadratorum talium, vel talium figurarum, adhuc subsistent, si illis nomina quadratorum solidorum earundem figurarum substituamus, hac .n. sola mutatione facta, cætera omnia manent in suo robore, vt in eo libro innuitur in scholio prop. 20. ac superius sæpè sæpius repetitum fuit.

Finis Septimi Libri.